3. Übung Theoretische Physik II Institut für theoretische Physik, JKU Linz
SS 2010 Übungstermin: 26.3.2010

9. **Eindimensionaler harmonischer Oszillator**
Der Hamilton-Operator eines eindimensionalen harmonischen Oszillators ist

$$\hat{\mathrm{H}} = \frac{\hat{\mathrm{p}}^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 \hat{\mathrm{x}}^2$$

und die Grundzustands-Wellenfunktion im Ortsraum

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right\} \ .$$

(a) Zeigen Sie, dass ψ_0 eine Eigenfunktion von $\hat{\mathrm{H}}$ ist und bestimmen Sie den Eigenwert.

(b) Geben Sie die Grundzustands-Wellenfunktion im Impulsraum an, d.h. bestimmen Sie die Koeffizienten in der Basis der Eigenfunktionen des Impulsoperators.

(c) Berechnen sie das Produkt der Varianzen der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten im Orts- und Impulsraum, $\langle(\Delta x)^2\rangle\langle(\Delta p)^2\rangle$, für ein Teilchen im Grundzustand.

Hinweis: Es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \mathrm{e}^{-\beta x^2} = \sqrt{\pi/\beta}$.

10. **Normierung nach Operation**
Bestimmen Sie die Norm (*i.e.* das Skalarprodukt mit sich selbst) eines Zustands $|\chi\rangle$ der durch Anwenden des Operators $\hat{\mathrm{A}}$ auf den normierten Zustand $|\psi\rangle$ entsteht. Die Eigenzustände $|\phi_i\rangle$ von $\hat{\mathrm{A}}$ und die zugehörigen Eigenwerte a_i seien bekannt:

$$\hat{\mathrm{A}}\,|\phi_i\rangle = a_i\,|\phi_i\rangle \ .$$

Ist $|\chi\rangle$ normiert, also $\langle\chi|\chi\rangle = 1$?

11. **Drehimpulsoperator in Ortsdarstellung**
In der klassischen Mechanik wird der Drehimpuls als $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ definiert. Nach dem Korrespondenzprinzip kann man dies – mit Orts- und Impuls*operator* – auch als quantenmechanische Definition betrachten.

(a) Bestimmen Sie $\hat{\mathrm{L}}^2 \equiv \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{L}}$ und geben Sie diesen Operator in Kugelkoordinaten an.

(b) Bestimmen Sie die Kommutatorrelationen $[\hat{\mathrm{L}}_i, \hat{\mathrm{L}}_j]$.

12. **Wasserstoffatom**
Die $1s$, $2s$ und $2p_z$ Wellenfunktionen des Wasserstoffatoms in Ortsdarstellung sind

$$\psi_{1s}(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{a^3\pi}}\,\mathrm{e}^{-r/a} \ ,$$

$$\psi_{2s}(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{(2a)^3\pi}}\,\mathrm{e}^{-r/2a}\left(1 - \frac{r}{2a}\right) \ ,$$

$$\psi_{2p_z}(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{2\sqrt{(2a)^3\pi}}\,\frac{r}{a}\,\mathrm{e}^{-r/2a}\cos\theta \ ,$$

mit dem Bohrradius $a = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/(m_\mathrm{e}e^2)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Zustände $2s$ und $2p$ orthonormal sind.

(b) Berechnen Sie die Mittelwerte der Observablen $\hat{\mathbf{r}}$ und $\hat{\mathbf{p}}$ für die Grundzustandswellenfunktion des Wasserstoffatoms ($1s$).