1. Übung Theoretische Physik II Institut für theoretische Physik, JKU Linz
SS 2010 Übungstermin: 12.3.2010

1. **Photoelektrischer Effekt**
   Die maximale Energie eines Photoelektrons das von Kalium emmitiert wird, welches mit Licht der Wellenlänge 3×10^{-7} m bestrahlt wird, ist 2.1 eV. Hat das einfallende Licht die Wellenlänge 5×10^{-7} m so haben die Photolektronen eine maximale Energie von 0.5 eV.

   Bestimmen Sie aus den gegebenen Daten das reduzierte plancksche Wirkungsquantum $\hbar$ und die Austrittsarbeit ϕ von Kalium.

   Hinweise: $1\,\mathrm{eV} = 1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$, $c = 3.0 \times 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

2. **Compton-Effekt**
   Ein Lichtteilchen (Photon) trägt neben der Energie $\hbar\omega$ auch den Impuls $p = \hbar\mathbf{k}$ ($\mathbf{k}$ ist der Wellenvektor). Betrachten Sie den elastischen Stoß eines Photons an einem Elektron mit der Masse $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg dass vor dem Stoß in Ruhe ist. Bestimmen Sie aus Energie- und Impulserhaltung die Änderung der Wellenlänge eines Photons der anfänglichen Wellenlänge 10^{-12} m wenn sich durch den Stoß seine Bahnrichtung um den Winkel $\theta = 60°$ verändert. Vernachlässigen Sie Terme der Ordnung $(\Delta k)^2$.

3. **Basissysteme**
   Betrachten Sie komplexe Funktionen im Intervall $x \in [0, L]$. Man kann diese Funktionen als Elemente des Vektorraums $\mathbb{R}^{[0,L]}$ betrachten. Die Multiplikation dieser Funktionen (skalares Produkt) sei definiert als

   $$f \cdot g = \int_0^L dx\, f^*(x)\, g(x) \ .$$

   Zeigen Sie, dass die ebenen Wellen

   $$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n x} \qquad \left(k_n = \frac{2\pi}{L}\,n\right)$$

   eine Orthonormalbasis sind indem Sie Orthonormalität,

   $$\phi_n \cdot \phi_m = \int_0^L dx\, \phi_n^*(x)\, \phi_m(x) = \delta_{n,m} \ ,$$

   sowie Vollständigkeit,

   $$\sum_j \phi_j^*(x)\, \phi_j(x') = \delta(x - x') \ ,$$

   beweisen.

   Stellen Sie eine beliebige Funktion $f(x)$ in dieser Basis dar, d.h. berechnen Sie die Koordinaten c_j in dieser Basis sodass

   $$f(x) = \sum_j c_j\, \phi_j(x) \ .$$

(bitte wenden)

4. **Pauli-Matrizen**

Die Pauli-Matrizen bilden eine Basis der hermiteschen, spurfreien 2×2 Matrizen. Sie lauten

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} , \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Zeigen Sie die folgenden Relationen ($\mathbb{1}$ sei die Einheitsmatrix, Tr die Spur (trace)):

$$\sigma_i^2 = \mathbb{1} \tag{1}$$

$$\operatorname{Tr} \sigma_i = 0 \tag{2}$$

$$\det \sigma_i = -1 \tag{3}$$

$$\sigma_i \sigma_j = \mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\sigma_k + \delta_{i,j}\mathbb{1} \tag{4}$$

$$[\sigma_i, \sigma_j]_- := \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i = 2\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\sigma_k \tag{5}$$

$$[\sigma_i, \sigma_j]_+ := \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{i,j} \tag{6}$$

Das Levi-Civita-Symbol ist

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{gerade Permutationen der Indices} \\ -1 & \text{ungerade Permutationen der Indices} \\ 0 & \text{sonst, } \textit{i.e.} \text{ zwei gleiche Indices} \end{cases}$$