33. **Zwei Drehimpulse**
Betrachten Sie ein System mit zwei voneinander unabhängigen Drehimpulsen $\hat{\mathbf{J}}_1$ und $\hat{\mathbf{J}}_2$. Da die Drehimpulse unabhängig sind kommutieren die entsprechenden Operatoren, $[\hat{\mathbf{J}}_1, \hat{\mathbf{J}}_2] = 0$ und der Zustandsraum des Systems ist das kartesische Produkt der beiden Zustandsräume von $\hat{\mathbf{J}}_1$ und $\hat{\mathbf{J}}_2$. Der Gesamtdrehimpuls-Operator ist $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{J}}_1 + \hat{\mathbf{J}}_2$.

(a) Bestimmen sie die Wirkungen von $\hat{\mathbf{J}}^2$ und $\hat{\mathrm{J}}_z$ auf einen Zustand $|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$. Ist das Ergebnis ein Eigenzustand des jeweiligen Operators?

(b) Betrachten Sie für fixe j_1 und j_2 die zwei Zustände mit $m = l_1 + l_2 - 1$: $|j_1, j_2, m_1 = j_1, m_2 = j_2 - 1\rangle$ und $|j_1, j_2, m_1 = j_1 - 1, m_2 = j_2\rangle$. Sie sind keine Eigenzustände von $\hat{\mathbf{J}}^2$ spannen als Basis jedoch einen zweidimensionalen Unterraum auf. Finden sie die Eigenvektoren und zugehörigen Eigenwerte von $\hat{\mathbf{J}}^2$ in diesem Unterraum.

34. **Zwei Spins**
Betrachte ein System aus zwei Spins mit $S_1 = S_2 = \frac{1}{2}$. Der Zustandsraum in der $|S_{1z}, S_{2z}\rangle$ Darstellung ist $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$. In der $|S, S_z\rangle$-Darstellung mit dem Gesamptspin $\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{S}}_1 + \hat{\mathbf{S}}_2$ gibt es drei sogenannte Triplett-Zustände mit Gesamtspin $S = 1$ und einen Singulett-Zustand mit $S = 0$.

Wie sehen diese Zustände aus? Wie sehen die Zustände in $|S_{1x}, S_{2x}\rangle$-Darstellung aus?

35. **Variationsrechungung für den Wasserstoffgrundzustand**
Bestimmen Sie aus dem Variationsprinzip eine Näherung für die Grundzustandsenergie des Wasserstoffatoms. Verwenden Sie eine Versuchswellenfunktion der Form

$$\psi(\mathbf{r}) = a_0^{-3/2} \frac{u(\rho)}{\rho} Y_l^m(\theta, \varphi)$$

mit

$$u_1 = \rho\, \mathrm{e}^{-b\rho} \qquad u_2 = \frac{\rho}{b^2 + \rho^2} \qquad u_3 = \rho^2\, \mathrm{e}^{-b\rho}$$

wobei

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} \qquad E_H = \frac{e^2}{2a_0} \qquad \rho = r/a_0\ .$$

Bestimmen Sie also jeweils den Parameter b für den der Erwartungswert der Energie minimal wird. Wie groß ist diese Energie in Einheiten der Hartree-Energie E_H? Fertigen Sie eine Skizze der optimalen $u_i(\rho)$ an und vergleichen Sie mit dem exakten Ergebnis. (Beachten Sie die Normierung.)

36. **Teilchen im unendlich tiefen Potentialtopf**
Betrachten Sie ein Teilchen in einem unendlich tiefen Potentialtopf,

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (|x| < L/2) \\ \infty & (|x| > L/2) \end{cases}$$

Bestimmen Sie mittels Variationsverfahren eine obere Grenze für die Grundzustandsenergie unter Verwendung der folgenden Versuchswellenfunktion für $|x| < L/2$:

$$\psi(x) = \left[1 - \left(\frac{2x}{L}\right)^2\right] + b\left[1 - \left(\frac{x}{L/2}\right)^4\right] \ .$$

Vergleichen Sie mit der exakten Lösung

$$\psi_0(x) = \cos\frac{\pi x}{L} \ , \quad E_0 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} \ .$$