11. Übung Theoretische Physik II Institut für theoretische Physik, JKU Linz
SS 2010 Übungstermin: 11.6.2010

41. **Zeitentwicklung**

(a) Die Taylor-Reihenentwicklung einer beliebigen Funktion f lautet

$$f(t) = \exp\left[(t-t_0)\tfrac{d}{dt'}\right] f(t')\Big|_{t'=t_0} \ .$$

Verwenden Sie die Schrödingergleichung, um daraus den Zeitentwicklungsoperator $\hat{\mathrm{U}}(t,t_0)$ zu ermitteln, der eine Wellenfunktion von der Zeit t_0 zur Zeit t propagiert,

$$|\psi(t)\rangle = \hat{\mathrm{U}}(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle \ .$$

(b) Zeigen Sie, dass $\hat{\mathrm{U}}$ unitär ist.

(c) Der Erwartungswert eines nicht-statischen Systems ist gegeben durch

$$\langle\hat{\mathrm{A}}\rangle(t) = \langle\psi(t)|\hat{\mathrm{A}}|\psi(t)\rangle \ .$$

Verwenden Sie den Zeitentwicklungsoperator $\hat{\mathrm{U}}(t,t_0)$, um bei bekanntem Zustand zur Zeit 0, $|\psi(0)\rangle$, einen Ausdruck für $\langle\hat{\mathrm{A}}\rangle(t)$ zu ermitteln. Wie hängt dieser Ausdruck mit dem Heisenberg-Bild zusammen?

42. **Statische Störung**

Zur Zeit $t=0$ befinde sich ein System im Zustand ψ_1^0 welcher zu einem zweifach entarteten Energieniveau gehört. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich das System zu einem späteren Zeit t im anderen (orthogonalen) Zustand derselben Energie, wenn das System einer konstanten (zeitunabhängigen) Störung unterliegt?

43. **Green's Funktionen**

(a) Führen sie in der statischen Schrödingergleichung für ein zeitunabhängiges Potential $V(\mathbf{r})$ dimensionslose Koordinaten

$$U(\mathbf{r}) := \tfrac{2m}{\hbar^2} V(\mathbf{r}) \qquad\qquad V(\mathbf{r}) = \tfrac{\hbar^2}{2m} U(\mathbf{r})$$
$$k^2 := \tfrac{2m}{\hbar^2} E \qquad\qquad E = \tfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

ein, um die inhomogene Gleichung:

$$\left[\boldsymbol{\nabla}^2 + k^2 - U(\mathbf{r})\right]\,\phi(\mathbf{r}) = 0$$

zu erhalten. $U(\mathbf{r})\,\phi(\mathbf{r})$ kann als Inhomogenität aufgefasst werden kann. Lösen Sie diese Gleichung allgemein, indem Sie die Green's-Funktion der freien Schrödingergleichung finden und angeben, wie mit dieser die Lösung zur Inhomogenität $U(\mathbf{r})$ konstruiert wird.

(b) Die im Punkt (a) gefundene (allgemeine) Lösung wird zur (rekursiven!) "Integralen Streugleichung" wenn man als Randbedingung eine einfallende ebene Welle betrachtet:

$$\phi(\mathbf{r}) = e^{\mathrm{i}\mathbf{k}_i\mathbf{r}} + \int d^3r'\,G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,U(\mathbf{r}')\,\phi(\mathbf{r}')$$

wobei $\mathbf{k}_i$ der Wellenvektor der einfallenden Welle ist. Entwickeln Sie diese Gleichung für grosse Entfernungen zum endlich ausgedehnten Streuer.

44. **Yukawa Potential**

(a) Bestimmen Sie die Fourietransformierte

$$\mathcal{F}\{f(\mathbf{r})\} = \tilde{f}(\mathbf{k}) = \int d^3r \, e^{-i\,\mathbf{k}\,\mathbf{r}} \, f(\mathbf{r})$$

des Yukawa-Potentials (e ist die Elementarladung, μ ein Parameter, e die Euler'sche Zahl)

$$V_Y(\mathbf{r}) = \frac{e^2 \, \mathrm{e}^{-\mu r}}{|\mathbf{r}|} \; .$$

(b) Bestimmen sie die Fouriertransformierte des Coulombpotentials direkt durch Integration obiger Definition.

45. **Runge-Lenz Vektor**

Im klassischen Keplerproblem, welches ebenfalls ein $\frac{1}{r}$ Potential beinhaltet, lautet der Runge-Lenz Vektor (in entsprechenden Einheiten) $\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \frac{\mathbf{r}}{r}$. Er zeigt zum Perihel und ist nur für das reine $\frac{1}{r}$ Potential konstant (keine Periheldrehung), d.h. seine Poisson-Klammer mit der Hamiltonfunktion verschwindet.

Zeigen Sie, dass analog dazu in der Quantenmechanik der Runge-Lenz Vektoroperator

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{1}{2me^2}\left[\hat{\mathbf{L}} \times \hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{L}}\right] + \frac{\hat{\mathbf{r}}}{|\hat{\mathbf{r}}|}$$

mit dem Hamiltonoperator eines Wasserstoffatoms kommutiert.

Da die Komponenten von $\hat{\mathbf{A}}$ weder miteinander vertauschen, noch mit $\hat{\mathbf{L}}^2$ jedoch mit der entsprechenden Drehimpulskomponente, z.b. $[\hat{\mathrm{A}}_z, \hat{\mathrm{L}}_z] = 0$, muss eine weitere Erhaltungsgröße existieren, die nicht gleichzeitig mit den anderen gemessen werden kann und zu einer zusätzlichen Entartung der Energieniveaus führt: sie hängen nicht von der Drehimpulsquantenzahl l ab. Diese "zufällige" Entartung tritt ausser beim $\frac{1}{r}$ Potential nur noch beim r^2 Potential (harmonischer Oszillator) auf.

46. **Streuung**

Bestimmen Sie Streuphase und Streuamplitude bei s-Wellen-Streuung an einem Hard-Core (harte Kugel) Potential

$$V(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & (|\mathbf{r}| > R) \\ \infty & (|\mathbf{r}| \le R) \end{cases}$$