13. Übung Theoretische Physik II Institut für theoretische Physik, JKU Linz
SS 2010 Übungstermin: 25.6.2010

51. **Helium-Atom: Variation**
Das Helium-Atom besteht aus einem zweifach geladenen Kern und zwei Elektronen die mit dem Kern sowie untereinander entsprechend des Coulomb-Potentals wechselwirken. Im Schwerpunktsystem des Kerns ist der Hamilton-Operator

$$\hat{\mathrm{H}} = \sum_{i=1}^{2} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 - \frac{Ze^2}{|\mathbf{r}_i|} \right] + \frac{e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

wobei m die Elektronenmasse und e die (positive) Elementarladung ist. Die Kernladungszahl Z ist natürlich $Z = 2$.

Vernachlässigt man in erster Näherung die Wechselwirkung der Elektronen miteinander (den letzten Term in obigem $\hat{\mathrm{H}}$), so separiert das Problem und man erhält als Grundzustands-Einzel-Wellenfunktion und -Energie

$$\psi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \mathrm{e}^{-Zr/a_0} \ , \quad E_0 = -\frac{\hbar^2 Z^2}{2ma_0^2} = -Z^2 \frac{e^2}{2a_0}$$

wobei $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$ der Bohr-Radius ist.

Die Gesamtenergie unter miteinbeziehen der Wechselwirkung zw. den Elektronen als Störung erster Ordnung wurde in der Vorlesung gezeigt.

Verbessern Sie das Ergebnis der ersten Ordnung Störungstheorie, indem Sie in der verwendeten Wellenfunktion den Parameter Z variieren. Welchem physikalischen Bild entspricht das veränderte Z?

Vergleichen Sie die Ergebnisse mit dem Experiment, das -78.97eV ergibt.

52. **Zwei Fermionen im harmonischen Oszillator**
Zwei identische, elektrisch neutrale, Spin $\frac{1}{2}$-Fermionen befinden sich in einem eindimensionalen harmonischen Oszillator Potential

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

(a) Finde die Energien des Grund- und des ersten angeregten Zustandes dieses Zwei-Fermion-Systems. Drücke die Eigenzustände dieser beiden Energieniveaus mit Wellenfunktionen des harmonischen Oszillators und Spinzuständen aus.

(b) Berechnen Sie das Abstandsquadrat der Fermionen,

$$\left\langle (x_1 - x_2)^2 \right\rangle = \left\langle x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 \right\rangle$$

für den Grundzustand.

53. **Galilei-Invarianz der Schrödingergleichung**
Zeigen Sie, dass die freie Schrödingergleichung

$$\left[\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \psi(x,t) = 0$$

unter spezieller Galilei-Transformation

$$x' = x - vt \ , \quad t' = t$$

invariant ist.