Meßmodelle und konfirmatorische Faktorenanalyse

Jost Reinecke

Universität Bielefeld

28. September 2005

Meßmodelle

Die Modellspezifikation

Die Identifikation der Modellparameter

Restriktionen im Meßmodell

Die Schätzung der Modellparameter

Statistiken der Modellprüfung

Empirische Beispiele zu den Meßmodellen

Die konfirmatorische Faktorenanalyse

Die Modellspezifikation

Die Identifikation der Modellparameter

Empirische Beispiele

Multiple Gruppenvergleiche von konfirmatorischen Faktorenmodellen

Der simultane Vergleich der Kovarianzstruktur

Der simultane Vergleich der Mittelwerte

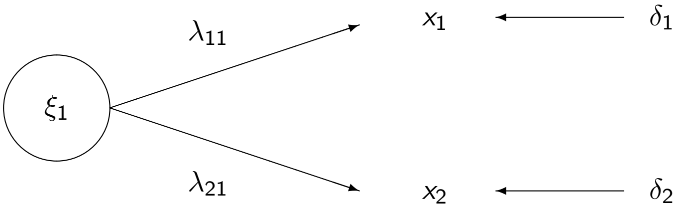
Meßmodelle

Die Modellspezifikation

Vier Schritte sind zur Spezifikation des Meßmodells durchzuführen:

1. *Die Definition des theoretischen Konzepts:* Hierzu gehört sowohl die Festlegung der Dimensionalität als auch die Benennung möglicher Hierarchieebenen.
2. *Die Formulierung der latenten Variablen:* Jede Dimension wird im Meßmodell durch eine latente Variable repräsentiert.
3. *Die Formulierung der manifesten Variablen:* Für jede latente Variable werden gemessene Variablen konstruiert, die beispielsweise bei Umfragedaten auf Itemformulierungen basieren.
4. *Die Formulierung der Beziehung zwischen latenten und manifesten Variablen:* Zur formalen Spezifikation des Meßmodells gehören die Meßgleichungen, die angeben, inwieweit die Messung die latente Variable repräsentiert und wie groß der Meßfehler ist.

Einfaktorielles Meßmodell mit zwei manifesten Variablen



Diesem Modell liegen folgende Meßgleichungen zugrunde:

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & = & \lambda_{11}\xi_1 & + & \delta_1 \\ x_2 & = & \lambda_{21}\xi_1 & + & \delta_2 \end{array} \qquad (1)$$

wobei ξ_1 die latente Variable sowie x_1 und x_2 die manifesten Variablen repräsentieren. λ_{11} und λ_{21} sind Regressionskoeffizienten, die das Ausmaß der Korrespondenz zwischen ξ und x_1 bzw. x_2 anzeigen, δ_1 und δ_2 sind die jeweiligen Meßfehleranteile für die manifesten Variablen. In der faktorenanalytischen Terminologie ist ξ der Faktor, λ_{11} und λ_{21} sind die Faktorenladungen. Da die

Meßgleichungen formal Regressionsgleichungen entsprechen, gelten die üblichen Annahmen:

- Die Meßfehler haben einen Erwartungswert von Null ($E(\delta_j) = 0$ für alle j),
- die latente Variable und die Meßfehler sind unkorreliert ($\sigma_{\xi_1,\delta_j} = 0$ für alle j).

Die Identifikation der Modellparameter

In der Logik der linearen kausalen Modellierung mit Strukturgleichungen sind der Modellaufbau und die entsprechend geschätzten Parameter eine Funktion der empirisch ermittelten Varianzen und Kovarianzen der manifesten Variablen. Dies hat zur Folge, daß die Informationen aus der empirischen Kovarianzmatrix zur Schätzung der unbekannten Parameter bezogen auf das spezifizierte Modell verwendet werden. Zwei Bedingungen müssen hierbei erfüllt sein:

1. Die Anzahl der Varianzen und Kovarianzen bezüglich der manifesten Variablen $p + q$ muß ausreichen, um die Anzahl der freien Parameter t im spezifizierten Modell ermitteln zu können, d. h. $t < 1/2(p + q)(p + q + 1)$. Diese Bedingung wird auch *t-Regel* genannt und führt zur Bestimmung der Freiheitsgrade (df) des Modells.
2. Die Skalierungen und damit auch die Varianzen der latenten Variablen sind nicht bekannt. Eine Schätzung der Parameter in den Meßgleichungen setzt aber eine Skalierung voraus. Diese kann einerseits durch Fixierung der Varianzen der latenten Variablen auf eine Konstante (in der Regel 1.0) erfolgen, andererseits kann die Faktorenladung eines Indikators auf einen Wert (in der Regel 1.0) fixiert werden. Mit der Fixierung der Varianz wird die latente Variable standardisiert. Die alternative Fixierung der Faktorenladung führt dazu, daß die latente Variable dieselbe Skalierung erhält wie die gemessene Variable.

Die empirische Kovarianzmatrix S des Meßmodells in Abbildung 1 enthält die Varianzen der Variablen x_1 und x_2 sowie deren Kovarianz:

$$S = \begin{pmatrix} \sigma^2_{x_1} & \\ \sigma_{x_2,x_1} & \sigma^2_{x_2} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Der Parametervektor Θ eines Meßmodells ist dann identifiziert, wenn es möglich ist zu zeigen, daß die Elemente von Θ eindeutig eine Funktion der Elemente der modellimplizierten Kovarianzmatrix Σ sind:

$$\begin{aligned} \sigma^2_{x_1} &= \lambda^2_{11}\phi_{11} + \sigma^2_{\delta_1} \\ \sigma^2_{x_2} &= \lambda^2_{21}\phi_{11} + \sigma^2_{\delta_2} \\ \sigma_{x_2,x_1} &= \lambda_{11}\phi_{11}\lambda_{21} \end{aligned} \tag{3}$$

Der Parametervektor Θ besteht hier aus fünf Elementen: Zwei Faktorenladungen (λ_{11}, λ_{21}), zwei Meßfehlern (δ_1, δ_2) und der Varianz der latenten Variablen (ϕ_{11}). Die Matrix Σ enthält dann als Funktion des Parametervektors $\Sigma(\Theta)$ die geschätzten Varianzen und die geschätzte Kovarianz nach der vorgegebenen

Modellstruktur in Abbildung 1:

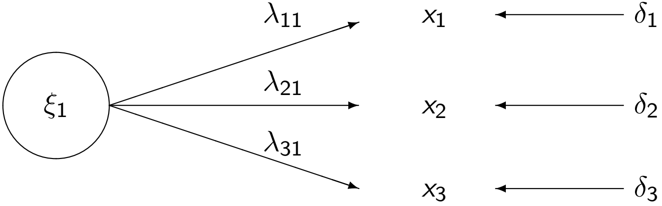
$$\Sigma = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^2_{x_1} & \\ \hat{\sigma}_{x_2,x_1} & \hat{\sigma}^2_{x_2} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Mit Hilfe der ermittelten Parameter lassen sich die modellimplizierten Varianzen und Kovarianzen *zurückrechnen*, so daß durch die Differenz zwischen empirischen und modellimplizierten Informationen $(S - \Sigma)$ eine Beurteilung der Gültigkeit des Meßmodells möglich wird:

$$S - \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma^2_{x_1} - \hat{\sigma}^2_{x_1} & \\ \sigma_{x_2,x_1} - \hat{\sigma}_{x_2,x_1} & \sigma^2_{x_2} - \hat{\sigma}^2_{x_2} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Aus Gleichung 3 wird aber deutlich, daß mit den fünf Unbekannten des Parametervektors Θ und den drei bekannten Größen der Matrix S ein Meßmodell mit einer latenten und zwei manifesten Variablen auf Grund der t-Regel nicht identifiziert ist. Daher wird das Meßmodell um eine weitere manifeste Variable erweitert (vgl. Abbildung 2).

Einfaktorielles Meßmodell mit drei manifesten Variablen



Folgende Meßgleichungen mit den entsprechenden Annahmen liegen dem Modell zugrunde:

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_{11}\xi_1 + \delta_1 \\ x_2 &= \lambda_{21}\xi_1 + \delta_2 \\ x_3 &= \lambda_{31}\xi_1 + \delta_3 \end{aligned} \tag{6}$$

Die empirische Kovarianzmatrix S des Meßmodells enthält nun sechs Elemente (drei Varianzen und drei Kovarianzen):

$$S = \begin{pmatrix} \sigma^2_{x_1} & & \\ \sigma_{x_2,x_1} & \sigma^2_{x_2} & \\ \sigma_{x_3,x_1} & \sigma_{x_3,x_2} & \sigma^2_{x_3} \end{pmatrix} \tag{7}$$

Der Parametervektor Θ besteht jetzt aus sieben Elementen: Drei Faktorenladungen (λ_{11}, λ_{21}, λ_{31}), drei Meßfehler (δ_1, δ_2, δ_3) und die Varianz des Faktors (ϕ_{11}). Die folgende Zerlegung zeigt, daß auch bei drei gemessenen Variablen die Anzahl der unbekannten Parameter größer ist als die Anzahl der bekannten Varianzen und Kovarianzen:

$$\begin{aligned} \sigma^2_{x_1} &= \lambda^2_{11}\phi_{11} + \sigma^2_{\delta_1} \\ \sigma^2_{x_2} &= \lambda^2_{21}\phi_{11} + \sigma^2_{\delta_2} \\ \sigma^2_{x_3} &= \lambda^2_{31}\phi_{11} + \sigma^2_{\delta_3} \\ \sigma_{x_2,x_1} &= \lambda_{11}\phi_{11}\lambda_{21} \\ \sigma_{x_2,x_3} &= \lambda_{21}\phi_{11}\lambda_{31} \\ \sigma_{x_1,x_3} &= \lambda_{11}\phi_{11}\lambda_{31} \end{aligned} \tag{8}$$

Erst wenn die Varianz der latenten Variablen auf einen Wert fixiert wird ($\phi_{11} = 1.0$), ist das Gleichungssystem lösbar. Wird dann jedes Element der Kovarianzmatrix in die korrespondierenden Parameter zerlegt, so bleiben nur noch sechs unbekannte Parameter übrig:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{x_1}^2 &= \lambda_{11}^2 + \sigma_{\delta_1}^2 \\
\sigma_{x_2}^2 &= \lambda_{21}^2 + \sigma_{\delta_2}^2 \\
\sigma_{x_3}^2 &= \lambda_{31}^2 + \sigma_{\delta_3}^2 \\
\sigma_{x_2,x_1} &= \lambda_{11}\lambda_{21} \\
\sigma_{x_2,x_3} &= \lambda_{21}\lambda_{31} \\
\sigma_{x_1,x_3} &= \lambda_{11}\lambda_{31}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Die Fixierung der Varianz der latenten Variablen ist gleichbedeutend mit der Standardisierung der latenten Variablen und - wie weiter oben schon erwähnt - eine notwendige Voraussetzung zur Schätzung von Strukturgleichungsmodellen mit latenten Variablen.

Wird alternativ die Fixierung einer Faktorenladung gewählt (z. B. $\lambda_{11} = 1.0$), kann ebenfalls ein lösbares Gleichungssystem aufgestellt werden:

$$\begin{aligned}
\sigma_{x_1}^2 &= \phi_{11} + \sigma_{\delta_1}^2 \\
\sigma_{x_2}^2 &= \lambda_{21}^2 \phi_{11} + \sigma_{\delta_2}^2 \\
\sigma_{x_3}^2 &= \lambda_{31}^2 \phi_{11} + \sigma_{\delta_3}^2 \\
\sigma_{x_2,x_1} &= \phi_{11} \lambda_{21} \\
\sigma_{x_2,x_3} &= \lambda_{21} \phi_{11} \lambda_{31} \\
\sigma_{x_1,x_3} &= \phi_{11} \lambda_{31}
\end{aligned} \tag{10}$$

In diesem Fall erhält die latente Variable ξ_1 die gleiche Skalierung wie die gemessene Variable x_1. Die latente Variable bleibt unstandardisiert und ihre Varianz (ϕ_{11}) kann geschätzt werden. Sowohl bei Gleichung 9 als auch bei Gleichung 10 ist die Anzahl der unbekannten gleich der Anzahl der bekannten Parameter ($df = 6 - 6 = 0$).

Restriktionen im Meßmodell

Das *parallele* Meßmodell nimmt gleiche Faktorenladen und gleiche Fehlervarianzen für die manifesten Variablen an und spezifiziert damit eine identische Konstruktvalidität der einzelnen Messungen. Für das diskutierte Meßmodell in Abbildung 2 sind dafür folgende Restriktionen notwendig:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_{11} = \lambda_{21} = \lambda_{31} \\ \sigma_{\delta}^2 &= \sigma_{\delta_{11}}^2 = \sigma_{\delta_{22}}^2 = \sigma_{\delta_{33}}^2 \end{aligned} \tag{11}$$

Die Zerlegung der Varianzen und Kovarianzen für diese Modellspezifikation zeigen die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sigma_{x_1}^2 &= \lambda^2\phi_{11} + \sigma_{\delta}^2 \\ \sigma_{x_2}^2 &= \lambda^2\phi_{11} + \sigma_{\delta}^2 \\ \sigma_{x_3}^2 &= \lambda^2\phi_{11} + \sigma_{\delta}^2 \\ \sigma_{x_1,x_2} &= \lambda^2\phi_{11} \\ \sigma_{x_1,x_3} &= \lambda^2\phi_{11} \\ \sigma_{x_2,x_3} &= \lambda^2\phi_{11} \end{aligned} \tag{12}$$

Die Identifikation des Modells ist über die Fixierung der Varianz der latenten Variablen gewährleistet ($\phi_{11} = 1.0$). Insgesamt sind durch die Restriktionen nur zwei Parameter zu schätzen. Die Anwendung der t-Regel zeigt dementsprechend, daß das Modell überidentifiziert ist und vier Freiheitsgrade hat ($df = 4$).

Das τ-*äquivalente* Meßmodell nimmt nur gleiche Fehlervarianzen für die gemessenen Variablen an und spezifiziert damit unterschiedliche Konstruktvalidität bei gleichem Meßfehlereinfluß. Für das Meßmodell in Abbildung 2 sind dafür folgende Restriktionen notwendig:

$$\sigma^2_{\delta} = \sigma^2_{\delta_{11}} = \sigma^2_{\delta_{22}} = \sigma^2_{\delta_{33}} \tag{13}$$

Die Zerlegung der Varianzen und Kovarianzen für diese Modellspezifikation zeigen die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\sigma^2_{x_1} &= \lambda^2_{11}\phi_{11} + \sigma^2_{\delta} \\
\sigma^2_{x_2} &= \lambda^2_{21}\phi_{11} + \sigma^2_{\delta} \\
\sigma^2_{x_3} &= \lambda^2_{31}\phi_{11} + \sigma^2_{\delta} \\
\sigma_{x_1,x_2} &= \lambda_{11}\phi_{11}\lambda_{21} \\
\sigma_{x_1,x_3} &= \lambda_{11}\phi_{11}\lambda_{31} \\
\sigma_{x_2,x_3} &= \lambda_{21}\phi_{11}\lambda_{31}
\end{aligned} \tag{14}$$

Bei Fixierung der Varianz der latenten Variablen ($\phi_{11} = 1.0$) sind vier Parameter zu schätzen. Das Modell ist mit zwei Freiheitsgraden überidentifiziert ($df = 2$).

Beim *kongenerischen* Meßmodell gibt es keine Restriktionen bezüglich der Faktorenladungen und der Fehlervarianzen. Werden drei gemessene Variablen für einen Faktor spezifiziert, dann ist das Modell mit sechs Parametern und sechs Gleichungen nach der Zerlegung gerade identifiziert:

$$\begin{aligned}
\sigma^2_{x_1} &= \lambda^2_{11}\phi_{11} + \sigma^2_{\delta_1} \\
\sigma^2_{x_2} &= \lambda^2_{21}\phi_{11} + \sigma^2_{\delta_2} \\
\sigma^2_{x_3} &= \lambda^2_{31}\phi_{11} + \sigma^2_{\delta_3} \\
\sigma_{x_1,x_2} &= \lambda_{11}\phi_{11}\lambda_{21} \\
\sigma_{x_1,x_3} &= \lambda_{11}\phi_{11}\lambda_{31} \\
\sigma_{x_2,x_3} &= \lambda_{21}\phi_{11}\lambda_{31}
\end{aligned} \tag{15}$$

Die Gleichungen 15 entsprechen den Gleichungen 9, da bis auf die Fixierung der Varianz der latenten Variablen ($\phi_{11} = 1.0$) keine weiteren Restriktionen spezifiziert sind.

Die Schätzung der Modellparameter

Im vorhergehenden Abschnitt ist mehrfach erwähnt worden, daß die Matrix der geschätzten Varianzen und Kovarianzen Σ eine Funktion des Parametervektors Θ ist. Verallgemeinert entspricht $\Sigma(\Theta)$ dem Erwartungswert des Produktes xx', soweit das Strukturgleichungsmodell ein Meßmodell ist:

$$\begin{aligned}
\Sigma(\Theta) &= E(xx') \\
&= E[(\Lambda_x \xi + \delta)(\Lambda_x' \xi' + \delta')] \\
&= \Lambda_x E(\xi\xi')\Lambda_x' + \Theta_\delta \\
&= \Lambda_x \Phi \Lambda_x' + \Theta_\delta
\end{aligned} \tag{16}$$

Die letzte Zeile der Gleichung 16 zeigt die Zerlegung der Kovarianzmatrix in die Parameter der Matrizen Λ_x, Φ und Θ_δ. Zur weiteren Verdeutlichung werden die Elemente der Vektoren und Matrizen des Meßmodells nach Gleichung 6 angegeben:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \Lambda_x = \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{21} \\ \lambda_{31} \end{pmatrix} \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \end{pmatrix} \quad \Phi = \begin{pmatrix} \phi_{11} \end{pmatrix} \tag{17}$$

$$\delta = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix} \quad \Theta_\delta = \begin{pmatrix} \sigma^2_{\delta_1} & & \\ 0 & \sigma^2_{\delta_2} & \\ 0 & 0 & \sigma^2_{\delta_3} \end{pmatrix}$$

Um $\Sigma(\Theta)$ für das einfaktorielle Meßmodell zu bestimmen, werden die Parametermatrizen mit der Restriktion $\phi_{11} = 1.0$ in Gleichung 16 eingesetzt:

$$\Sigma(\Theta) = \begin{pmatrix} \lambda^2_{11} + \sigma^2_{\delta_1} & & \\ \lambda_{11}\lambda_{21} & \lambda^2_{21} + \sigma^2_{\delta_2} & \\ \lambda_{11}\lambda_{31} & \lambda_{21}\lambda_{31} & \lambda^2_{31} + \sigma^2_{\delta_3} \end{pmatrix} \tag{18}$$

Die Schätzung der einzelnen Parameter in Θ erfolgt iterativ über die Minimierung einer Diskrepanzfunktion F. Minimiert wird die Diskrepanz zwischen empirischer Kovarianzmatrix S und modellimplizierter Kovarianzmatrix Σ. Folgende Eigenschaften muß die Diskrepanzfunktion aufweisen:

1. Der Funktionswert ist nur dann gleich Null, wenn $S = \Sigma(\Theta)$ oder größer Null, wenn $S - \Sigma > 0$ ist.
2. Die Funktion ist zweifach differenzierbar, d. h. erste und zweite Ableitungen sind berechenbar.

Die Maximum-Likelihood(ML)-Diskrepanzfunktion

Die folgende ML-Funktionsgleichung strebt die Minimierung des Funktionswertes und damit die Minimierung der Differenz zwischen den Matrizen S und Σ an:

$$F_{ML} = log\|\Sigma(\Theta)\| + tr(S\Sigma^{-1}(\Theta)) - log\|S\| - (p+q) \qquad (19)$$

$\|S\|$ is die Determinante der empirischen Kovarianzmatrix, während $\|\Sigma(\Theta)\|$ die Determinante der modellimplizierten Kovarianzmatrix ist. $tr(\ldots)$ bezieht sich auf die Spur (*trace*) einer Matrix. Damit die ML-Funktion geschätzt werden kann, müssen die Determinanten $\|S\|$ und $\|\Sigma(\Theta)\|$ ungleich 0 sein. Sind $\|S\|$ und $\|\Sigma(\Theta)\|$ ungleich Null, dann sind die entsprechenden Matrizen singulär und können nicht invertiert werden. Eine Berechnung von $\Sigma^{-1}(\Theta)$ wäre dann nicht möglich. Die Anzahl der gemessenen Variablen und damit die Größe der empirischen Kovarianzmatrix wird durch $(p+q)$ angegeben. Wenn die empirische und die modellimplizierte Kovarianzmatrix exakt übereinstimmen $(S = \Sigma(\Theta))$, dann ist der Funktionswert der Gleichung 19 Null. Damit kann die angenommene Modellstruktur die empirischen Daten exakt vorhersagen. Wenn die Meßmodelle überidentifiziert sind, dann werden die ML-Schätzer iterativ ermittelt. Der Funktionswert erreicht dann seinen minimalen Wert, wenn alle ersten Ableitungen der Elemente des Parametervektors Θ Null sind und die Matrix der zweiten Ableitungen berechnet werden kann. Wird der ermittelte Funktionswert des zu prüfenden Modells mit der um eins verringerten Stichprobengröße multipliziert, dann folgt die ermittelte Größe einer χ^2-Verteilung mit $1/2(p+q)(p+q+1)-t$ Freiheitsgraden Damit läßt sich die Nullhypothese $H_0 : \Sigma = \Sigma(\Theta)$ testen. Bestätigt sich diese Hypothese, dann passen die Parameterrestriktionen des Modells zu den Daten. Wird die Nullhypothese widerlegt ($\Sigma \neq \Sigma(\Theta)$), dann ist mindestens eine Restriktion im Modell falsch. Mit dem χ^2-Test wird auch die Wahrscheinlichkeit (p-Wert) ausgewiesen, wie gut das Modell in der Grundgesamtheit zu den Daten paßt. Je größer der χ^2-Wert (und je kleiner der p-Wert), desto eher liegt eine Diskrepanz zwischen Modell und Daten vor.

Die Unweighted-Least-Square(ULS)-Diskrepanzfunktion
Die folgende ULS-Funktionsgleichung strebt die Minimierung der Quadratsummen jedes Elementes in der Residualmatrix $S - \Sigma(\Theta)$ an:

$$F_{ULS} = \frac{1}{2} tr[S - \Sigma(\Theta)]^2 \tag{20}$$

Die Residualmatrix enthält die Differenzen zwischen den empirischen Varianzen und Kovarianzen der gemessenen Variablen und den Varianzen und Kovarianzen, die durch das Modell vorhergesagt werden.

Die Generalized-Least-Square(GLS)-Diskrepanzfunktion
Die ULS-Diskrepanzfunktion nimmt an, daß alle Elemente der Matrix $S - \Sigma(\Theta)$ die gleichen Streuungen aufweisen. Um diese Annahme fallen lassen zu können, kann Gleichung 20 durch eine Gewichtungsmatrix verallgemeinert werden, die als GLS-Diskrepanzfunktion bezeichnet wird:

$$F_{GLS} = \frac{1}{2} tr[(S - \Sigma(\Theta))(W^{-1}]^2 \qquad (21)$$

Die Gewichtungsmatrix W wird meistens so gewählt, daß sie sich aus der Inversen der empirischen Kovarianzmatrix zusammensetzt ($W^{-1} = S^{-1}$). GLS-Schätzer sind wie ML-Schätzer skaleninvariant. Skalentransformationen haben damit keine Auswirkungen auf die Größe der geschätzten Parameter.

Die Weighted-Least-Square(WLS)-Diskrepanzfunktion

Ein wesentlicher Vorteil der WLS-Diskrepanzfunktion besteht darin, daß keinerlei Annahmen über die Schiefe und die Kurtosis der Variablen getroffen werden müssen, da diese Informationen durch die Gewichtungsmatrix W bei der Schätzung der Parameter berücksichtigt werden. Daher stammt auch die auf Browne (1982, 1984) zurückgehende Bezeichnung der Funktion als *arbitrary distribution function* (ADF). Die WLS-Diskrepanzfunktion lautet:

$$F_{WLS} = [s - \sigma(\Theta)]' W^{-1} [s - \sigma(\Theta)] \tag{22}$$

mit s als Vektor der $(p+q) \cdot (p+q+1)/2$ Elemente der empirischen Kovarianzmatrix S und $\sigma(\Theta)$ als Vektor der korrespondierenden Elemente der modellimplizierten Kovarianzmatrix $\Sigma(\Theta)$. Die Gewichtungsmatrix W^{-1} hat die Größe $(p+q) \cdot (p+q+1)/2 \times (p+q) * (p+q+1)/2$ und enthält die höheren Momente der multivariaten Verteilungen der Elemente von S. Für Gleichung 22 wird die Kovarianzmatrix der Varianzen und Kovarianzen der gemessenen Variablen als optimale Gewichtungsmatrix eingesetzt. Diese Matrix wird als *asymptotische Varianz-/Kovarianzmatrix* bezeichnet. Die asymptotische

Kovarianz zwischen den empirischen Kovarianzen s_{ij} und s_{gh} wird allgemein folgendermaßen berechnet:

$$ACOV(s_{ij}, s_{gh}) = N^{-1}(\sigma_{ijgh} - \sigma_{ij}\sigma_{gh}) \tag{23}$$

mit σ_{ijgh} als viertes Moment und σ_{ij} bzw. σ_{gh} als Populationskovarianzen. Die Schätzung für das vierte Moment σ_{ijgh} lautet:

$$\hat{\sigma}_{ijgh} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(x_{it} - \bar{x}_i)(x_{jt} - \bar{x}_j)(x_{gt} - \bar{x}_g)(x_{ht} - \bar{x}_h) \tag{24}$$

Die Schätzungen für die Populationskovarianzen σ_{ij} und σ_{gh} lauten:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{ij} &= \tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{t=1}^{N}(x_{it} - \bar{x}_i)(x_{jt} - \bar{x}_j) \\ \hat{\sigma}_{gh} &= \tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{t=1}^{N}(x_{gt} - \bar{x}_g)(x_{ht} - \bar{x}_h) \end{aligned} \tag{25}$$

Mit der WLS-Diskrepanzfunktion ist es möglich, einen χ^2-basierten Modelltest zu erhalten, der keine Voraussetzungen an die Verteilung der Variablen stellt. Ebenso voraussetzungslos ist die Bestimmung der Standardfehler der geschätzten Parameter.

Die WLS-Funktion berücksichtigt bei der Modellschätzung die Informationen aus den Verteilungen der Variablen über die asymptotische Varianz-/Kovarianzmatrix und nutzt daher alle Informationen über die Datenstruktur optimal aus. Eine Korrelationsmatrix S kann zur Modellprüfung verwendet werden, wenn die asymptotische Kovarianz der Korrelationen r_{ij} und r_{gh} für die Gewichtungsmatrix W^{-1} eingesetzt wird.
Nicht zu vernachlässigende Nachteile sind die erforderliche Stichprobengröße und der Berechnungsaufwand. Die Anzahl der Varianzen und Kovarianzen in der Matrix S bestimmt die Größe der asymptotischen Varianz-/Kovarianzmatrix. Bei 10 Variablen hat die Kovarianzmatrix S $(10 \cdot 10 + 1)/2 = 55$ Elemente (Varianzen in der Diagonalen und die Kovarianzen unterhalb der Diagonalen). Die zu invertierende Gewichtungsmatrix W beinhaltet dann immerhin $55 \times 55 = 3080$ asymptotische Varianzen und Kovarianzen.

Statistiken der Modellprüfung

1. Der Forscher befindet sich mit seinem Modell in einer streng konfirmatorischen Situation. Wenn das Modell zu den Daten paßt, dann wird es akzeptiert, ansonsten wird das Modell verworfen.
2. Der Forscher formuliert ein Ausgangsmodell, das über die Modellmodifikationen schrittweise den Daten angepaßt wird. Hiermit ist nicht ein sogenanntes inhaltsleeres *model fitting* gemeint, vielmehr sollte der Modifikationsprozeß theoriegeleitet sein, so daß die Parameter substantiell interpretierbar werden.
3. Der Forscher hat verschiedene alternative oder konkurrierende Modelle formuliert und prüft mit den zugrundeliegenden Daten, welches Modell am besten zu den Daten paßt.

Die Modellevaluation
Die χ^2-Statistik

Um die Nullhypothese $H_0 : \Sigma = \Sigma(\Theta)$ statistisch testen zu können, kann bei überidentifizierten Modellen die χ^2-Statistik verwendet werden. Da Σ als Populationskovarianzmatrix unbekannt ist, wird die Stichprobenkovarianzmatrix S als Schätzung für Σ verwendet und die Differenz $S - \Sigma(\Theta)$ geprüft. Der χ^2-Wert wird aus dem Funktionswert einer der diskutierten Diskrepanzfunktionen berechnet:

$$\begin{aligned}
\chi^2 &= (N-1)F_{ML} \\
\chi^2 &= (N-1)F_{ULS} \\
\chi^2 &= (N-1)F_{GLS} \\
\chi^2 &= (N-1)F_{WLS}
\end{aligned} \tag{26}$$

Der Funktionswert ergibt sich aus der iterativ bestimmten Lösung genau an dem Punkt, wo die Funktion ihr Minimum erreicht hat, also ihre erste Ableitung Null ist. Der χ^2-Wert ist umso kleiner, je geringer die Differenz $S - \Sigma(\Theta)$ ist. Wenn der χ^2-Wert einen voher definierten kritischen Wert überschreitet, dann ist die Nullhypothese widerlegt.

Es gibt allerdings mehrere Gründe, die χ^2-Statistik nicht als Teststatistik für Strukturgleichungsmodelle zu verwenden, da mehrere Voraussetzungen existieren, die mit empirischen Daten nur teilweise erfüllt werden können:

1. Die manifesten Variablen müssen multinormalverteilt sein (bei F_{ML} und F_{GLS}) bzw. die Gewichtungsmatrix W muß optimal sein (bei F_{WLS}).
2. Die Stichprobe ist hinreichend groß.
3. S ist eine Kovarianzmatrix und keine Korrelationsmatrix.
4. Die Hypothese $H_0 : \Sigma = \Sigma(\Theta)$ stimmt exakt.

Goodness-of-Fit Indizes

Modelle, die für die Population nicht exakt aber näherungsweise gelten, werden - wie oben beschrieben - nach der χ^2-Statistik bei großen Stichproben immer zurückgewiesen. Um entsprechend alternative Fit-Statistiken zu entwickeln, müssen zunächst die verschiedenen Arten von Abweichungen (Diskrepanzen) definiert werden. Theoretisch werden hierzu drei Kovarianzmatrizen benötigt: die Populationskovarianzmatrix Σ, die Kovarianzmatrix $\tilde{\Sigma}$ als die am besten angepaßte Matrix zur Populationskovarianzmatrix ($\tilde{\Sigma} = \Sigma(\Theta)$) und die Kovarianzmatrix $\hat{\Sigma}$ als die am besten angepaßte Kovarianzmatrix zur Stichprobenkovarianzmatrix S ($\hat{\Sigma} = \Sigma(\hat{\Theta})$). Browne und Cudeck (1993, S. 141) können damit drei Diskrepanztypen unterscheiden:

1. Diskrepanz bezogen auf die Annäherung (*Discrepancy due to approximation*)
2. Diskrepanz bezogen auf die Schätzung (*Discrepancy due to estimation*)
3. Diskrepanz bezogen auf den Gesamtfehler (*Discrepancy due to overall error*)

Die erste Diskrepanz bezieht sich auf die Differenz zwischen Σ und $\tilde{\Sigma}$, die in einer Fehlerfunktion $F(\Sigma, \tilde{\Sigma})$ ausgedrückt werden kann. Die Funktion ist nur dann Null, wenn $\Sigma = \tilde{\Sigma}$. Ansonsten ist diese Diskrepanz eine unbekannte Konstante, die bei Hinzunahme weiterer freier Parameter kleiner wird.
Die zweite Diskrepanz bezieht sich auf die Differenz zwischen $\hat{\Sigma}$ und $\tilde{\Sigma}$, deren Erwartungswert durch

$$E[F(\tilde{\Sigma}, \hat{\Sigma})] \approx n^{-1}t \tag{27}$$

näherungsweise ausgedrückt wird ($n = N - 1$). Der Erwartungswert steigt mit Zunahme der freien Parameter t.
Die dritte Diskrepanz bezieht sich auf die Differenz zwischen Σ und $\hat{\Sigma}$, deren Erwartungswert als Summe der ersten und zweiten Diskrepanz aufgefaßt werden kann:

$$\begin{aligned} E[F(\Sigma, \hat{\Sigma})] &\approx F(\Sigma, \tilde{\Sigma}) + E[F(\tilde{\Sigma}, \hat{\Sigma})] \\ &\approx F(\Sigma, \tilde{\Sigma}) + n^{-1}t \end{aligned} \tag{28}$$

Mit Zunahme der freien Parameter kann der Gesamtfehler steigen. Dies wird dann passieren, wenn es sich um eine kleine Stichprobe handelt und die zweite Diskrepanz steigt. Die Stichprobendiskrepanzfunktion $\hat{F} = F(S, \hat{\Sigma})$ ist dann eine verzerrte Schätzung der ersten Diskrepanz $F_0 = F(\Sigma, \tilde{\Sigma})$. Der Erwartungswert der Stichprobendiskrepanzfunktion kann aber nach Browne und Cudeck (1993) über die erste Diskrepanz näherungsweise bestimmt werden:

$$E\hat{F} \approx F_0 + n^{-1} df \tag{29}$$

Um negative Werte zu vermeiden, wird die Punktschätzung $\hat{F}_0$ als Populationsdiskrepanzfunktion (*Population Discrepancy Function*) aufgestellt:

$$\hat{F}_0 = \text{Max}\{\hat{F} - n^{-1} df, 0\} \tag{30}$$

wobei $\hat{F}$ das Minimum der Funktion ist. Wenn $\hat{F}_0 = 0$, dann paßt das Modell perfekt zu den Daten. Da von Stichprobe zu Stichprobe die Diskrepanz streuen kann, wird mit einem 90%igen Vertrauensintervall gearbeitet:

$$(\hat{\lambda}_L/n; \hat{\lambda}_U/n) \tag{31}$$

wobei $\lambda = n \times F_0$. $\hat{\lambda}_L$ ist die untere (lower), $\hat{\lambda}_U$ die obere (upper) Grenze des Vertrauensintervalls. Da aber $\hat{F}_0$ im allgemeinen auch dann kleiner wird, wenn redundante Parameter spezifiziert werden (und damit eine möglichst sparsame Modellierung konterkariert wird), wird der ursprünglich von Steiger (1990) entwickelte *Root Mean Square Error of Approximation* (RMSEA), der auf der Populationsdiskrepanzfunktion basiert, empfohlen:

$$RMSEA = \sqrt{\frac{\hat{F}_0}{df}} \tag{32}$$

Der RMSEA mißt die Diskrepanz zwischen Σ und $\tilde{\Sigma}$ pro Freiheitsgrad und hat wie $\hat{F}_0$ eine Untergrenze von Null, wenn das Modell exakt zu den Daten paßt. Werden dem Modell redundante Parameter hinzugefügt, dann kann im Unterschied zu $\hat{F}_0$ der RMSEA auch steigen. Nach den Erfahrungen von Browne und Cudeck (1993) werden Werte des RMSEA, die größer als 0.08 sind, als *große* Diskrepanz, Werte zwischen 0.05 und 0.08 als *mittlere* Diskrepanz und Werte kleiner als 0.05 als *kleine* Diskrepanz interpretiert. Das 90%ige Vertrauensintervall des RMSEA wird folgendermaßen berechnet:

$$\left(\sqrt{\frac{\hat{\lambda}_L}{ndf}}; \sqrt{\frac{\hat{\lambda}_U}{ndf}} \right) \tag{33}$$

Der gewöhnliche Test der Nullhypothese ($H_0 : \Sigma = \Sigma(\Theta)$) hat sich in praktischen Anwendungen als unplausibel erwiesen und kann mit Hilfe des RMSEA durch eine andere Nullhypothese (*null hypothesis of close fit*) ersetzt werden:

$$H_0 = RMSEA \leq 0.05 \tag{34}$$

Diese Nullhypothese wird dann nicht zurückgewiesen, wenn die untere Grenze des Vertrauensintervalls des RMSEA in Gleichung 33 kleiner als 0.05 ist.

Standardfehler und z-Wert

Wenn ein Modell auf Grund der Nullhypothese $H_0 : \Sigma = \Sigma(\Theta)$ und anderer *Goodness-of-Fit* Kriterien akzeptiert wird, können die geschätzten Parameter danach beurteilt werden, ob diese signifikant von Null verschieden sind. Da mit steigender Stichprobengröße die ML-Schätzer approximativ einer Normalverteilung folgen, kann auf die z-Statistik bzw. t-Statistik zurückgegriffen werden. Für den Test eines Parameters $\Theta_i = 0$ wird der z-Wert aus dem Verhältnis zwischen dem geschätzten Parameter $\hat{\Theta}_i$ und seinem Standardfehler $SE(\hat{\Theta}_i)$ ermittelt:

$$z = \frac{\hat{\Theta}_i}{SE(\hat{\Theta}_i)} \tag{35}$$

Die Standardfehler werden aus der invertierten Matrix der zweiten partiellen Ableitungen der ML-Diskrepanzfunktion berechnet. Bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0.05$ ist der Parameter $\Theta_i = 0$, wenn $z \leq 1.96$.

Residuen und standardisierte Residuen

Bei jeder Modellprüfung wird von der Nullhypothese $H_0 : \Sigma = \Sigma(\Theta)$ ausgegangen. Es gibt keine Differenz zwischen Σ und $\Sigma(\Theta)$, wenn die Hypothese zutrifft. Da die Populationskovarianzmatrix Σ unbekannt ist, wird für die Differenzbildung die Stichprobenkovarianzmatrix S und die modellimplizierte Kovarianzmatrix $\hat{\Sigma}$ verwendet. Die Residualmatrix $S - \hat{\Sigma}$ ist die einfachste Form, um einen Modellfit zu erlangen. Ein positiver Wert in der Matrix $S - \hat{\Sigma}$ bedeutet, daß das Modell die entsprechende Kovarianz zwischen zwei Variablen unterschätzt, während ein negativer Wert auf eine Überschätzung der entsprechenden Kovarianz hinweist. Eine zusammenfassende Statistik dieser Abweichungen bietet der *Root Mean Square Residual* (RMR):

$$RMR = \left[2 \sum_{i=1}^{p+q} \sum_{j=1}^{i} \frac{(s_{ij} - \hat{\sigma}_{ij})^2}{(p+q)(p+q+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{36}$$

mit s_{ij} als Elemente der Matrix S und $\hat{\sigma}_{ij}$ als Elemente der Matrix Σ. Je kleiner der RMR ist, desto kleiner sind im Durchschnitt die

Abweichungen bzw. Residuen in der Matrix $S - \hat{\Sigma}$.
Die unterschiedlichen Skalierungen der gemessenen Variablen können die Residualgrößen aber beeinflussen. So kann eine große Abweichung eines Elementes in der Matrix $S - \hat{\Sigma}$ darauf zurückzuführen sein, daß die Skalierung der betreffenden Variablen wesentlich breiter ist, als bei anderen Variablen. Eine feste Ober- und Untergrenze existiert demnach für die Residuen nicht. Werden dagegen die Abweichungen auf der Basis von Korrelationen berechnet ($r_{ij} - \hat{r}_{ij}$), dann können die Abweichungen theoretisch nur zwischen -2 und $+2$ liegen. Ein weitere Größe, die die Werte der Residuen beeinflussen kann, ist der Stichprobenumfang. Wenn man unterstellt, daß das Modell in der Grundgesamtheit korrekt ist ($\Sigma = \Sigma(\Theta)$), dann werden mit steigendem Stichprobenumfang die Werte der Residuen abnehmen.

Um diese Skalierungsdifferenzen und Stichprobenvariationen zu berücksichtigen, wird von Jöreskog und Sörbom die Verwendung von normalisierten Residuen (*normalized residuals*) vorgeschlagen:

$$\text{Normalized Residual} \quad = \frac{(s_{ij} - \hat{\sigma}_{ij})}{\left[(\hat{\sigma}_{ii}\hat{\sigma}_{jj} + \hat{\sigma}_{ij}^2)/N\right]^{1/2}} \tag{37}$$

Im Zähler der Gleichung 37 steht die beschriebene Abweichung bzw. das Residuum und im Nenner dessen geschätzte asymptotische Variation. Die größten Werte der normalisierten Residuen weisen auf entsprechende Fehlspezifikationen im Modell hin.

Der Likelihood-Ratio(LR)-Test (χ^2-Differenzentest)
Der Likelihood-Ratio(LR)-Test bezieht sich auf die Differenz der χ^2-Statistiken zwischen zwei Modellvarianten:

$$LR = (N-1)(F_r - F_u) \tag{38}$$

mit F_r als Funktionswert der Diskrepanzfunktion des restringierten und F_u als Funktionswert der Diskrepanzfunktion des unrestringierten (oder weniger restringierten) Modells. Auf Grund der Differenzbildung wird der LR-Test auch als χ^2-Differenzentest bezeichnet, der bei hierarchischer Modellstruktur wiederum einer χ^2-Verteilung folgt:

$$LR \sim \chi^2 \tag{39}$$

In der Praxis wird demnach die einfache Differenz der beiden χ^2-Werte gebildet und geprüft, ob mit der parallel zu berechnenden Differenz der Freiheitsgrade eine signifikante Veränderung zu verzeichnen ist. Wenn sich beispielsweise aus der Spezifikation einer Restriktion im Modell nur eine unwesentliche Differenz zwischen den beiden χ^2-Werten ergibt, dann ist das restriktivere Modell zu akzeptieren.

Der Langrange Multiplier(LM)-Test

Der Langrange Multiplier(LM)-Test evaluiert den statistischen Effekt, wenn zusätzliche Parameter in dem Strukturgleichungsmodell spezifiziert werden. Der LM-Test ist in seiner univariaten Form nichts anderes als eine χ^2-Differenzstatistik mit einem Freiheitsgrad:

$$LM - \text{Test} \sim \chi_1^2 \tag{40}$$

Je größer der Wert des LM-Test ist, desto stärker fällt die Modellverbesserung aus. Wird der betreffende Parameter freigesetzt, dann sinkt der Wert der χ^2-Statistik (vgl. Gleichung 26) um genau die Größe des LM-Tests auf der Basis der restriktiveren Modellvariante. Der Test kann wiederholt von Modellvariante zu Modellvariante eingesetzt werden, wobei dem Anwender die Freisetzung jeweils nur eines Parameters pro Modellprüfung empfohlen wird. Außerdem sollte der substanzielle Gehalt der freizusetzenden Parameter vorher geprüft werden. Denn eine nach dem LM-Test verbesserte Modellvariante kann zu inhaltlich unsinnigen Schlußfolgerungen führen.

Modellevaluation	LISREL	EQS
Independence χ^2	x	x
Model χ^2 (C1)	x	x
Normal Theory WLS χ^2 (C2)	x	x
Scaled χ^2 statistic (C3)	x	x
Satorra χ^2 statistic (C4)	x	
F_0	x	
RMSEA	x	x
GFI	x	x
z-Wert	x	x
$S - \Sigma$	x	x
Normalized Residual	x	
RMR	x	x
Modellsparsamkeit, Modellvergleich		
LR-Test	x	x
LM-Test	x	x
W-Test		x
NFI (IFI1, Δ_1)	x	x
NFI2 (IFI2, Δ_2)	x	x
TLI (NNFI)	x	x

Empirische Beispiele zu den Meßmodellen

Die Items der Dimensionen *legale politische Aktivitäten*

Var.	Item	Kategorien							
		1	2	3	4	5	6	7	
		% n	% n	% n	% n	% n	% n	% n	$\sum$
V135	Öffentl. Diskussion	16.9 527	14.8 461	17.0 531	21.7 678	16.1 504	8.5 266	5.0 157	3124
V136	Bürger-initiative	20.0 626	12.6 393	15.9 495	20.2 631	17.5 548	9.4 294	4.4 137	3124
V137	Partei-mitarbeit	28.4 886	12.8 401	12.5 389	15.0 468	14.2 443	11.0 345	6.2 192	3124

Skalierung:
Kategorie 1: überhaupt nicht

Kategorie 7: sehr stark

Die Items der Dimensionen *illegale politische Aktivitäten*

Var.	Item	Kategorien							
		1	2	3	4	5	6	7	
		% n	% n	% n	% n	% n	% n	% n	$\sum$
V138	Ungenehm. Demo	52.4 1637	16.9 527	11.4 356	9.8 306	5.3 165	2.6 82	1.6 51	3124
V139	Besetzungs- aktion	66.4 2073	13.3 416	8.0 249	6.2 193	3.4 106	1.2 38	1.6 49	3124
V144	Verkehrs- blockade	57.7 1802	15.7 491	9.4 294	8.6 270	4.9 152	2.2 70	1.4 45	3124

Skalierung:

Kategorie 1: überhaupt nicht

Kategorie 7: sehr stark

Die Momente der Verteilungen für die Items der Dimensionen *legale* und *illegale politische Aktivitäten*

Item	$\bar{x}$	s^2	s^3	s^4
V135	3.511	1.731	0.155	-0.879
V136	3.484	1.774	0.098	-1.012
V137	3.315	1.964	0.281	-1.201
V138	2.131	1.522	1.308	0.872
V139	1.769	1.353	1.961	3.373
V144	1.998	1.474	1.490	1.404

Korrelationsmatrix der Items der Dimensionen *legale* und *illegale politische Aktivitäten*

Legale pol. Aktivitäten				Illegale pol. Aktivitäten			
V135	1.000			V138	1.000		
V136	0.636	1.000		V139	0.687	1.000	
V137	0.498	0.669	1.000	V144	0.580	0.679	1.000

Modellvergleiche durch den χ^2-Differenzentest

Legale pol. Aktivitäten					
Modell (ML)	χ^2	df	χ^2_{Diff}	df_{Diff}	RMSEA
parallel	350.68	4	$--$	$--$	0.17
τ-äquivalent	152.96	2	197.72	2	0.16
kongenerisch	0	0	152.96	2	0.00
Modell (WLS)	χ^2	df	χ^2_{Diff}	df_{Diff}	RMSEA
parallel	363.75	4	$--$	$--$	0.17
τ-äquivalent	146.23	2	217.52	2	0.15
kongenerisch	0	0	146.23	2	0.00
Illegale pol. Aktivitäten					
Modell (ML)	χ^2	df	χ^2_{Diff}	df_{Diff}	RMSEA
parallel	248.66	4	$--$	$--$	0.14
τ-äquivalent	13.09	2	235.57	2	0.04
kongenerisch	3.26	1	9.83	1	0.03
Modell (WLS)	χ^2	df	χ^2_{Diff}	df_{Diff}	RMSEA
parallel	122.07	4	$--$	$--$	0.10
τ-äquivalent	8.00	2	114.07	2	0.03
kongenerisch	2.25	1	5.75	1	0.02

Neben den unstandardisierten Parametern sind auch die standardisierten Parameter $(\lambda_{ij}^s, \delta_i^s)$ der berechneten Meßmodelle angegeben. Die standardisierten Parameter werden folgendermaßen berechnet:

$$\lambda_{ij}^s = \lambda_{ij} \left(\frac{\sigma_{jj}^2}{\sigma_{ii}^2} \right)^{1/2} \tag{41}$$

$$\delta_i^s = 1 - (\lambda_{ij}^s)^2 \tag{42}$$

mit σ_{jj}^2 als Varianz der latenten Variablen ξ und σ_{ii}^2 als Varianz der jeweiligen gemessenen Variablen x. Durch ihre festen Intervallgrenzen (0,1) wird die inhaltliche Interpretation der standardisierten Parameter erleichtert. Nach den Ergebnissen werden durch die Variablen V136 und V139 die jeweiligen untersuchten Konstrukte am besten repräsentiert.

Unstandardisierte (λ) und standardisierte (λ^s) Faktorenladungen sowie entsprechende Meßfehler (δ^s) der kongenerischen Meßmodelle

Legale pol. Aktivitäten						
Item (ML)	λ	z-Wert	λ^s	δ	z-Wert	δ^s
V135	1.19	40.02	0.69	1.58	31.77	0.53
V136	1.64	55.68	0.93	0.46	7.97	0.15
V137	1.42	42.29	0.72	1.84	29.30	0.16
Item (WLS)	λ	z-Wert	λ^s	δ	z-Wert	δ^s
V135	1.19	41.43	0.69	1.58	25.89	0.53
V136	1.64	61.40	0.93	0.46	6.50	0.15
V137	1.42	45.74	0.72	1.84	24.44	0.16
Illegale pol. Aktivitäten						
Item (ML)	λ	z-Wert	λ^s	δ	z-Wert	δ^s
V138	1.14	56.08	0.76	0.97	30.05	0.43
V139	1.21	56.96	0.89	0.36	13.63	0.20
V144	1.14	56.08	0.77	0.92	29.34	0.41
Item (WLS)	λ	z-Wert	λ^s	δ	z-Wert	δ^s
V138	1.14	45.62	0.76	0.98	18.44	0.43
V139	1.21	37.43	0.89	0.36	9.31	0.20
V144	1.14	45.62	0.77	0.92	17.56	0.41

Die konfirmatorische Faktorenanalyse

Unterschiede zwischen exploratorischer und konfirmatorischer Faktorenanalyse

Exploratorische Faktorenanalyse	Konfirmatorische Faktorenanalyse
Kein theoretisches Modell Anzahl der Faktoren wird durch die Analyse bestimmt Faktorenkorrelation wird durch die Analyse bestimmt Zuordnung zwischen manifesten Variablen und Faktoren wird durch die Analyse bestimmt	Theoretisches Modell A priori Festlegung der Faktorenzahl Faktoren werden a priori korreliert bzw. nicht korreliert Zuordnung zwischen manifesten Variablen und Faktoren wird durch a priori Restriktionen bestimmt

Die Modellspezifikation

Die Spezifikation des konfirmatorischen Faktorenmodells ist gleichzeitig eine Verallgemeinerung der Gleichungen für Meßmodelle für mehr als eine latente Variable:

$$x_i = \Lambda_{x_{ij}} \xi_j + \delta_i, \quad i = 1, \ldots, p; \quad j = 1, \ldots, n \tag{43}$$

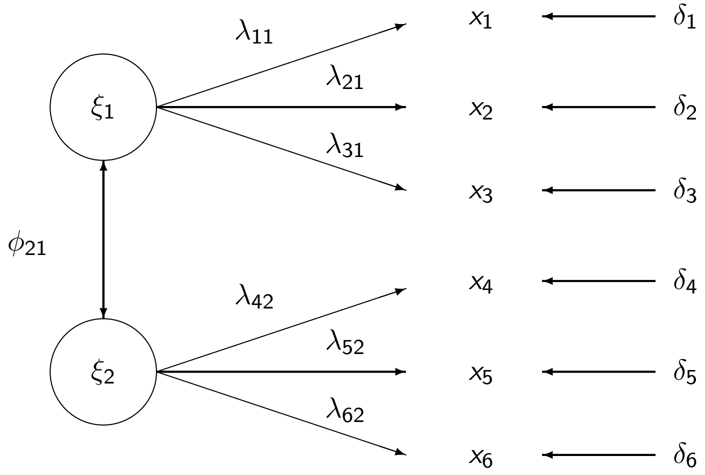
$$y_i = \Lambda_{y_{ij}} \eta_j + \epsilon_i, \quad i = 1, \ldots, q; \quad j = 1, \ldots, m \tag{44}$$

x_i und y_i sind die manifesten, ξ und η die latenten Variablen (Faktoren). Die Beziehungen zwischen den latenten und manifesten Variablen werden durch die Koeffizientenmatrizen Λ_{x_i} bzw. Λ_{y_i} ausgedrückt. δ_i und ϵ_i sind die jeweiligen Meßfehleranteile der manifesten Variablen x_i bzw. y_i. Bei beiden Gleichungen gelten die üblichen Annahmen:

$$E(\delta_i) = E(\epsilon_i) = 0 \tag{45}$$

$$E(\xi_j \delta_i^{'}) = E(\eta_j \epsilon_i^{'}) = 0 \tag{46}$$

Konfirmatorisches Faktorenmodell mit zwei latenten Variablen



Auf der Basis der allgemeinen Meßgleichungen kann das beschriebene konfirmatorische Faktorenmodell auch formal spezifiziert werden:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 \\ \lambda_{21} & 0 \\ \lambda_{31} & 0 \\ 0 & \lambda_{42} \\ 0 & \lambda_{52} \\ 0 & \lambda_{62} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{pmatrix} \tag{47}$$

mit den Annahmen

$$\begin{array}{ll} COV(\xi_j, \delta_i) = 0 & \text{für alle } i = 1, \ldots, p \text{ und alle } j = 1, \ldots, n \text{ und} \\ E(\delta_i) = 0 & \text{für alle } i = 1, \ldots, p. \end{array}$$

Neben den Faktorenladungen in der Matrix Λ_x sind die Varianzen und Kovarianzen der latenten Variablen (Matrix Φ) und die Meßfehlervarianzen (Matrix Θ_δ) zu ermitteln:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix} \tag{48}$$

$$
\Theta_\delta = \begin{pmatrix} \theta_{\delta_1} & & & & & \\ 0 & \theta_{\delta_2} & & & & \\ 0 & 0 & \theta_{\delta_3} & & & \\ 0 & 0 & 0 & \theta_{\delta_4} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_{\delta_5} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_{\delta_6} \end{pmatrix}
$$

Um $\Sigma(\Theta)$ für das konfirmatorische Faktorenmodell zu bestimmen, werden die Parametermatrizen entsprechend eingesetzt:

$$
\Sigma(\Theta) = \begin{pmatrix} \lambda_{11}^2\phi_{11} + \theta_{\delta_1} & & & & & \\ \lambda_{11}\phi_{11}\lambda_{21} & \lambda_{21}^2\phi_{11} + \theta_{\delta_2} & & & & \\ \lambda_{11}\phi_{11}\lambda_{31} & \lambda_{21}\phi_{11}\lambda_{31} & \lambda_{31}^2\phi_{11} + \theta_{\delta_3} & & & \\ \lambda_{11}\phi_{21}\lambda_{41} & \lambda_{21}\phi_{21}\lambda_{41} & \lambda_{31}\phi_{21}\lambda_{41} & \lambda_{41}^2\phi_{22} + \theta_{\delta_4} & & \\ \lambda_{11}\phi_{21}\lambda_{51} & \lambda_{21}\phi_{21}\lambda_{51} & \lambda_{31}\phi_{21}\lambda_{51} & \lambda_{41}\phi_{22}\lambda_{51} & \lambda_{51}^2\phi_{22} + \theta_{\delta_5} & \\ \lambda_{11}\phi_{21}\lambda_{61} & \lambda_{21}\phi_{21}\lambda_{61} & \lambda_{31}\phi_{21}\lambda_{61} & \lambda_{41}\phi_{22}\lambda_{61} & \lambda_{51}\phi_{22}\lambda_{61} & \lambda_{61}^2\phi_{22} + \theta_{\delta_6} \end{pmatrix} \tag{49}
$$

Die Schätzung der einzelnen Parameter in Θ erfolgt über die Minimierung der erläuterten Diskrepanzfunktionen F, soweit die Identifikationsbedingungen erfüllt sind.

Die Identifikation der Modellparameter

Die Identifikation der Parameter im konfirmatorischen Faktorenmodell folgt dem in Abschnitt 2 erläuterten Regelsystem für die Meßmodelle. Ergänzend kann hierzu ausgeführt werden, daß jedes konfirmatorische Faktorenmodell zwei notwendige (wenn auch nicht hinreichende) Bedingungen erfüllen muß:

1. Die Anzahl der zu schätzenden Parameter muß gleich oder kleiner sein als die Anzahl der Beobachtungen (d. h. die Anzahl der Parameter in der Kovarianzmatrix).
2. Jede latente Variable ξ muß eine Skala erhalten.

Empirische Beispiele

Die Items der Dimensionen *Empathie*, *Bestrafung* und *Mißhandlung*

Empathie						
Item	Wortlaut	Kategorien				
		1	2	3	4	
		% n	% n	% n	% n	$\sum$
E0004	Erklären bei Fehlern	4.9	18.7	51.8	24.6	
		88	333	923	438	1782
E0006	Unterstützen bei Ärger	6.6	18.5	48.8	26.1	
		117	330	870	465	1782
E0008	Trösten	6.6	15.5	42.4	35.5	
		117	276	756	633	1782

Die Items der Dimensionen *Empathie*, *Bestrafung* und *Mißhandlung*

Bestrafung						
Item	Wortlaut	Kategorien				
		1	2	3	4	
		% n	% n	% n	% n	$\sum$
E0011	Fernsehverbot	52.4	29.5	12.5	5.7	
		933	525	222	102	1782
E0012	Hausarrest	61.8	24.5	8.5	5.1	
		1102	437	152	91	1782
E0013	Taschengeldkürzung	75.7	15.1	5.3	3.9	
		1349	269	95	69	1782

Skalierung:
Kategorie 1: nie
Kategorie 2: selten
Kategorie 3: manchmal
Kategorie 4: häufig

Mißhandlung						
Item	Wortlaut	Kategorien				
		1	2	3	4	
		% n	% n	% n	% n	$\sum$
E0020	Prügel, Schläge	90.7	4.6	1.9	2.7	
		1617	82	34	49	1782
E0021	Faustschläge	91.1	4.4	1.9	2.6	
		1624	78	34	46	1782
E0023	Körperverletzung mit	92.5	3.6	1.7	2.2	
	Waffe	1649	64	30	39	1782

Skalierung:
Kategorie 1: nie
Kategorie 2: selten
Kategorie 3: manchmal
Kategorie 4: häufig

Die der Verteilungen für die Items der Konstrukte *Empathie*, *Bestrafung* und *Mißhandlung*

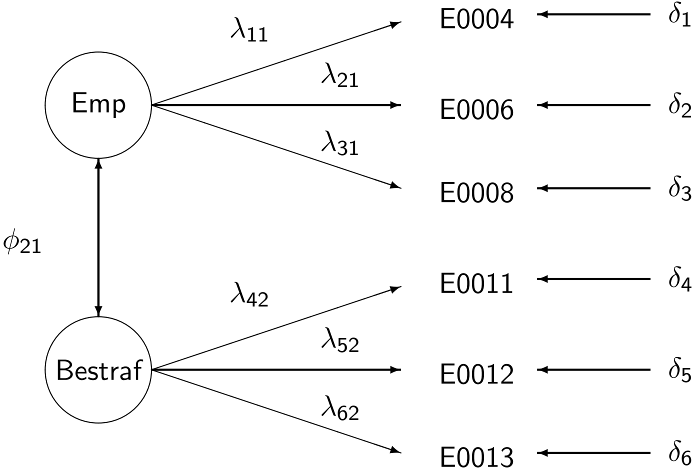
Item	$\bar{x}$	s^2	s^3	s^4
E0004	2.960	0.793	-0.524	-0.023
E0006	2.944	0.840	-0.560	-0.166
E0008	3.069	0.877	-0.720	-0.161
E0011	1.715	0.893	1.073	0.218
E0012	1.569	0.850	1.450	1.252
E0013	1.374	0.757	2.142	3.876
E0020	1.167	0.585	3.830	14.230
E0021	1.159	0.572	3.923	15.021
E0023	1.135	0.531	4.310	18.417

s^2 = Varianz
s^3 = Schiefe
s^4 = Kurtosis

Korrelationsmatrix der Items der Konstrukte *Empathie*, *Bestrafung* und *Mißhandlung*

	Empathie			Bestrafung			Mißhandlung		
	E0004	E0006	E0008	E0011	E0012	E0013	E0020	E0021	E0023
E0004	1.000								
E0006	0.534	1.000							
E0008	0.539	0.584	1.000						
E0011	-0.027	0.010	0.032	1.000					
E0012	-0.042	0.006	-0.021	0.549	1.000				
E0013	-0.080	-0.018	-0.038	0.437	0.487	1.000			
E0020	-0.130	-0.077	-0.109	0.238	0.334	0.421	1.000		
E0021	-0.136	-0.079	-0.088	0.258	0.308	0.409	0.833	1.000	
E0023	-0.077	-0.052	-0.088	0.215	0.281	0.401	0.735	0.785	1.000

Konfirmatorisches Faktorenmodell mit den Konstrukten *Empathie* und *Bestrafung*

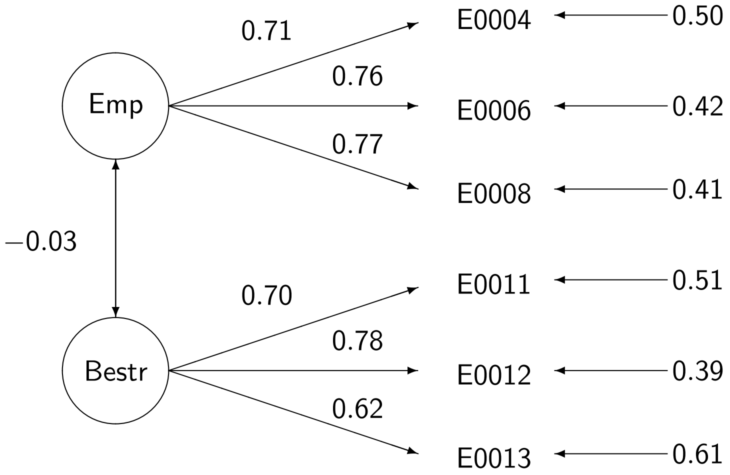


Empathie und Bestrafung					
Modell (ML)	χ^2	df	RMSEA	p-Wert	GFI
C1	24.32	8	0.034	0.958	0.996
C2	24.23				
C3	19.19		0.028	0.989	0.996
C4	19.47				
Modell (WLS)	χ^2	df	RMSEA	p-Wert	GFI
C1	19.44	8	0.028	0.989	0.992
Bestrafung und Mißhandlung					
Modell (ML)	χ^2	df	RMSEA	p-Wert	GFI
C1	125.23	8	0.091	0.000	0.977
C2	127.42				
C3	59.30		0.059	0.125	0.977
C4	55.36				
Modell (WLS)	χ^2	df	RMSEA	p-Wert	GFI
C1	54.21	8	0.056	0.212	0.954
Empathie und Mißhandlung					
Modell (ML)	χ^2	df	RMSEA	p-Wert	GFI
C1	27.80	8	0.037	0.918	0.995
C2	27.71				
C3	16.15		0.024	0.997	0.995
C4	17.68				
Modell (WLS)	χ^2	df	RMSEA	p-Wert	GFI

Unstandardisierte Faktorenladungen (λ), Meßfehler (δ) und die jeweiligen Standardfehler (z-Wert) des ersten Faktorenmodells

Modell: Empathie und Bestrafung (ML)						
Item	λ	z-Wert	z-Wert(r)	δ	z-Wert	z-Wert(r)
E0004	0.56	29.70	25.08	0.32	21.43	15.60
E0006	0.64	32.16	29.18	0.30	17.65	12.99
E0008	0.67	32.44	30.54	0.32	17.18	12.54
E0011	0.63	27.51	22.70	0.41	18.73	13.77
E0012	0.67	30.21	22.69	0.28	13.20	9.22
E0013	0.47	24.77	15.55	0.35	23.19	15.19
Modell: Empathie und Bestrafung (WLS)						
Item	λ	z-Wert		δ	z-Wert	
E0004	0.56	25.18		0.31	15.43	
E0006	0.63	29.30		0.30	13.14	
E0008	0.67	30.88		0.30	12.22	
E0011	0.63	23.23		0.40	13.69	
E0012	0.66	22.90		0.28	9.40	
E0013	0.46	15.29		0.34	15.14	

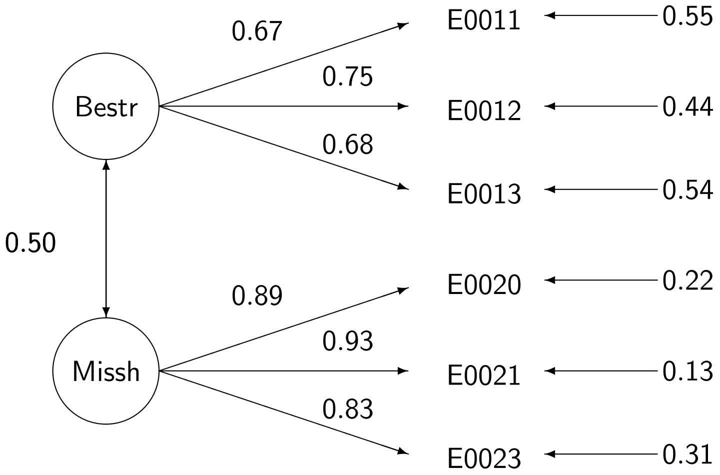
Konfirmatorisches Faktorenmodell mit den Konstrukten *Empathie* und *Bestrafung*



Unstandardisierte Faktorenladungen (λ), Meßfehler (δ) und die jeweiligen Standardfehler (z-Wert) des zweiten Faktorenmodells

Modell: Bestrafung und Mißhandlung (ML)						
Item	λ	z-Wert	z-Wert(r)	δ	z-Wert	z-Wert(r)
E0011	0.60	27.73	23.30	0.43	21.92	16.31
E0012	0.63	30.91	23.84	0.32	17.68	12.69
E0013	0.51	28.04	17.13	0.31	21.56	14.06
E0020	0.52	46.95	17.93	0.07	19.58	5.93
E0021	0.53	51.10	17.85	0.04	12.60	4.23
E0023	0.44	42.86	13.67	0.09	24.17	6.47
Modell: Bestrafung und Mißhandlung (WLS)						
Item	λ	z-Wert		δ	z-Wert	
E0011	0.60	21.59		0.39	13.67	
E0012	0.61	21.26		0.30	11.08	
E0013	0.46	14.60		0.29	13.68	
E0020	0.41	12.94		0.06	5.07	
E0021	0.46	14.68		0.03	2.83	
E0023	0.33	9.36		0.07	6.35	

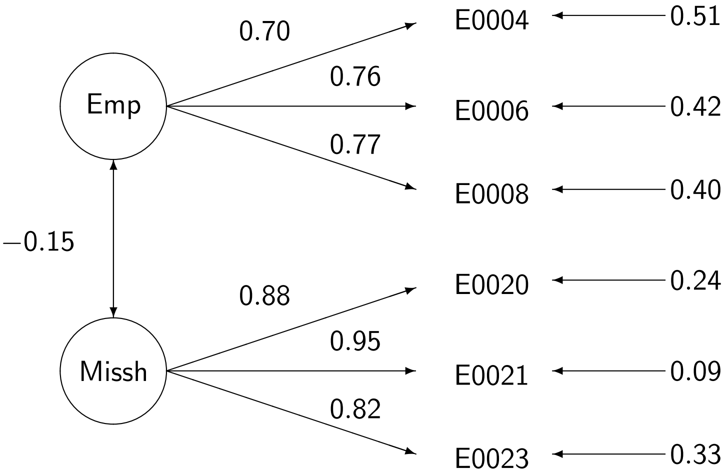
Konfirmatorisches Faktorenmodell mit den Konstrukten *Bestrafung* und *Mißhandlung*



Unstandardisierte Faktorenladungen (λ), Meßfehler (δ) und die jeweiligen Standardfehler (z-Wert) des dritten Faktorenmodells

Modell: Empathie und Mißhandlung (ML)						
Item	λ	z-Wert	z-Wert(r)	δ	z-Wert	z-Wert(r)
E0004	0.56	29.95	25.24	0.32	22.06	16.01
E0006	0.65	32.78	29.48	0.30	17.88	12.94
E0008	0.68	33.25	31.03	0.31	17.09	12.36
E0020	0.52	45.83	17.82	0.08	20.18	6.30
E0021	0.55	52.49	18.43	0.03	8.63	2.86
E0023	0.44	41.49	13.68	0.10	24.86	6.77
Modell: Empathie und Mißhandlung (WLS)						
Item	λ	z-Wert		δ	z-Wert	
E0004	0.56	26.08		0.31	15.89	
E0006	0.65	30.68		0.29	12.90	
E0008	0.68	31.34		0.31	12.60	
E0020	0.49	16.71		0.08	6.67	
E0021	0.54	18.11		0.02	2.03	
E0023	0.44	13.22		0.08	5.98	

Konfirmatorisches Faktorenmodell mit den Konstrukten *Empathie* und *Mißhandlung*



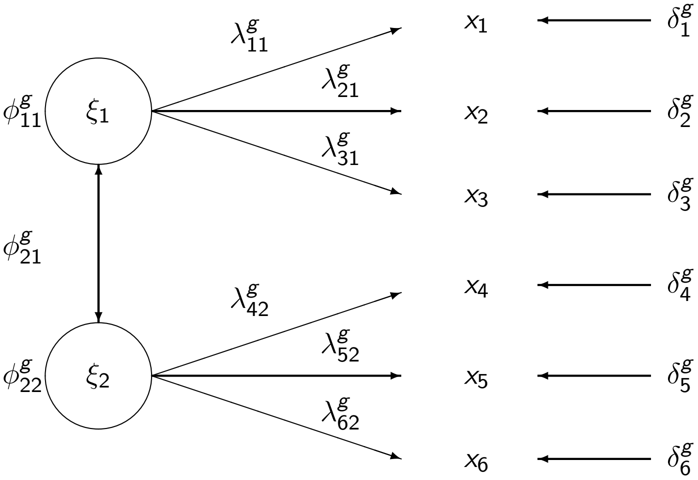
Multiple Gruppenvergleiche von konfirmatorischen Faktorenmodellen

Der simultane Vergleich der Kovarianzstruktur
Zur Berechnung der Parameter des konfirmatorischen Faktorenmodells wird folgendes Gleichungssystem zu Grunde gelegt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11}^g & 0 \\ \lambda_{21}^g & 0 \\ \lambda_{31}^g & 0 \\ 0 & \lambda_{42}^g \\ 0 & \lambda_{52}^g \\ 0 & \lambda_{62}^g \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_1^g \\ \delta_2^g \\ \delta_3^g \\ \delta_4^g \\ \delta_5^g \\ \delta_6^g \end{pmatrix} \tag{50}$$

Das konfirmatorische Faktorenmodell ist für jede Gruppe g durch die Parameter in den Gleichungen definiert, wobei mit $g = 1, 2, \ldots G$ die jeweilige Gruppe bezeichnet wird.

Konfirmatorisches Faktorenmodell mit zwei latenten Variablen für den multiplen Gruppenvergleich



Neben den Faktorenladungen in der Matrix Λ_x können die Varianzen und Kovarianzen der latenten Variablen (Matrix Φ) sowie die Meßfehlervarianzen (Matrix Θ_δ) über die Gruppen restringiert werden:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_{11}^g & \\ \phi_{21}^g & \phi_{22}^g \end{pmatrix}$$

$$\Theta_\delta = \begin{pmatrix} \sigma_{\delta_1^g} & & & & & \\ 0 & \sigma_{\delta_2^g} & & & & \\ 0 & 0 & \sigma_{\delta_3^g} & & & \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\delta_4^g} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\delta_5^g} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\delta_6^g} \end{pmatrix} \quad (51)$$

Um das konfirmatorische Faktorenmodell schätzen zu können, werden entweder die Varianzen der Faktoren ($\phi_{11}^g = \phi_{22}^g = 1$ für alle Gruppen $g = 1, 2, \ldots G$) oder jeweils eine Faktorenladung pro Faktor (z. B. $\lambda_{11}^g = \lambda_{42}^g = 1$ für alle Gruppen $g = 1, 2, \ldots G$) restringiert.

Mit den Parameterrestriktionen in der Matrix Λ_x kann nun getestet werden, ob die Faktorenladungen über die Gruppen signifikant variieren oder ob diese Variation so unbedeutend ist, daß die gewählten Restriktionen die Modellanpassung nicht beeinträchtigen würden. Hierzu vergleicht man die Modellvarianten (jeweils mit und ohne die gewählten Parameterrestriktionen) mit Hilfe des χ^2-Differenzentests. Die Gleichsetzung der Faktorenladungen aus Gleichungen 50 kann wie folgt spezifiziert werden:

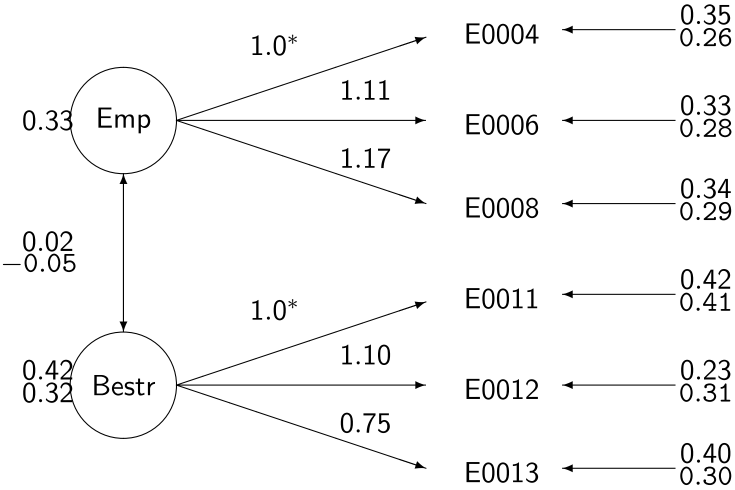
$$\begin{array}{c} \lambda_{11}^1 = \lambda_{11}^2 = \ldots = \lambda_{11}^G \\ \lambda_{21}^1 = \lambda_{21}^2 = \ldots = \lambda_{21}^G \\ \lambda_{31}^1 = \lambda_{31}^2 = \ldots = \lambda_{31}^G \\ \lambda_{42}^1 = \lambda_{42}^2 = \ldots = \lambda_{42}^G \\ \lambda_{52}^1 = \lambda_{52}^2 = \ldots = \lambda_{52}^G \\ \lambda_{62}^1 = \lambda_{62}^2 = \ldots = \lambda_{62}^G \end{array} \tag{52}$$

Die Gleichsetzung der Parameter in den Matrizen Φ und Θ_δ erfolgt in gleicher Weise.

Vergleich der Modellvarianten nach dem multiplen Gruppenvergleich für das Modell mit den Faktoren *Empathie* und *Bestrafung*

Modell	Gruppe		χ^2	df	χ^2_{Diff}	df_{Diff}	RMSEA	GFI
Variante 1	m		49.77					0.982
Basismodell	w		57.18					0.979
		$\sum$	106.95	29	−−	−−	0.055	
Variante 2	m		35.64					0.987
Θ_δ frei	w		34.07					0.988
		$\sum$	69.71	23	37.24	6	0.048	
Variante 3	m		26.22					0.990
$+ \Phi$ frei	w		23.59					0.991
		$\sum$	49.81	21	19.90	2	0.039	
Variante 4	m		20.27					0.993
$+ \lambda_x$ frei	w		17.88					0.993
		$\sum$	38.15	17	11.66	4	0.037	

Ergebnis der Modellvariante 3 des konfirmatorischen Faktorenmodells

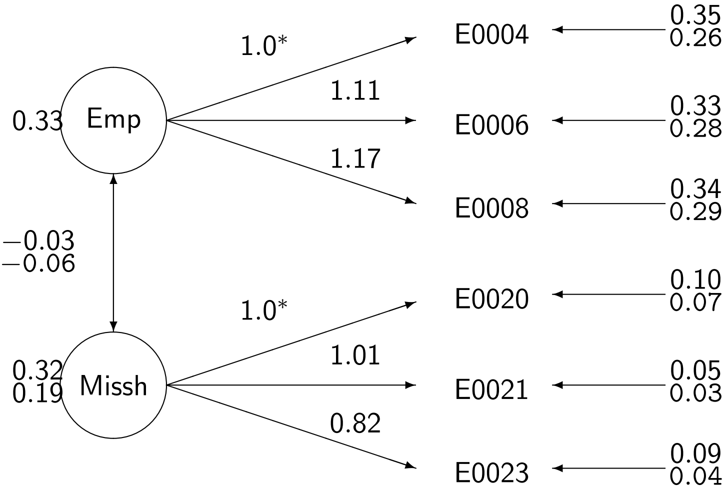


xx = Parameter der ersten Gruppe; `xx` = Parameter der zweiten Gruppe

Vergleich der Modellvarianten nach dem multiplen Gruppenvergleich für das Modell mit den Faktoren *Empathie* und *Mißhandlung*

Modell	Gruppe		χ^2	df	χ^2_{Diff}	df_{Diff}	RMSEA	GFI
Variante 1	m		124.15					0.959
Basismodell	w		141.72					0.939
		$\sum$	265.87	29	$--$	$--$	0.097	
Variante 2	m		64.86					0.975
$+\ \Theta_\delta$ frei	w		48.13					0.983
		$\sum$	112.99	23	152.88	6	0.067	
Variante 3	m		38.62					0.986
$+\ \Phi$ frei	w		15.06					0.994
		$\sum$	53.68	21	59.31	2	0.042	
Variante 4	m		34.48					0.987
$+\ \lambda_x$ frei	w		11.78					0.995
		$\sum$	46.26	17	7.42	4	0.045	

Ergebnis der Modellvariante 3 des konfirmatorischen Faktorenmodells



xx = Parameter der ersten Gruppe; `xx` = Parameter der zweiten Gruppe

Der simultane Vergleich der Mittelwerte

Der multiple Gruppenvergleich der konfirmatorischen Faktorenmodelle läßt auch einen simultanen Vergleich der Mittelwerte zu. Hierzu werden die Mittelwertvektoren der Variablen für die einzelnen Gruppen berechnet und als empirische Größen dem Gruppenvergleichsmodell hinzugefügt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_{11}^g & 0 \\ \lambda_{21}^g & 0 \\ \lambda_{31}^g & 0 \\ 0 & \lambda_{42}^g \\ 0 & \lambda_{52}^g \\ 0 & \lambda_{62}^g \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_1^g \\ \delta_2^g \\ \delta_3^g \\ \delta_4^g \\ \delta_5^g \\ \delta_6^g \end{pmatrix} \quad (53)$$

Dieses konfirmatorische Faktorenmodell ist für jede Gruppe $g = 1, 2, \ldots G$ definiert. Es gelten auch hier die unter Gleichung 47 genannten Annahmen. Die Restriktionsmöglichkeiten für die Faktorenladungen (λ) und für die Residualvarianzen (δ) erfolgen nach den Gleichungen 51 bzw. 52.

In Gleichung 53 werden zur Identifikation des Modells die Varianzen der latenten Variablen (ϕ) auf den Wert 1.0 fixiert. Da die manifesten Mittelwertinformationen im Gruppenvergleich berücksichtigt werden, läßt sich auch auf der latenten Ebene eine Mittelwertschätzung vornehmen. Der Mittelwertvektor der latenten Variablen ξ wird mit κ bezeichnet. Allerdings sind die latenten Mittelwerte in den einzelnen Gruppen aus Identifikationsgründen nicht schätzbar, sondern nur die Mittelwertsdifferenzen zwischen den Gruppen. Um diese Differenzen ermitteln zu können, werden in einer Gruppe (üblicherweise die Referenzgruppe) die latenten Mittelwerte auf Null restringiert:

$$\kappa_1^1 = \kappa_1^2 = 0 \tag{54}$$

Demnach sind κ_1^2 und κ_2^2 zwei zu schätzende Parameter, die als Differenzen zu Null zu interpretieren sind. Um eine inhaltlich sinnvolle Interpretation der latenten Mittelwertsdifferenzen zu gewährleisten, sollten die Mittelwerte der manifesten Variablen über die Gruppen gleichgesetzt werden:

$$\begin{aligned}
\tau_1^1 &= \tau_1^2 \\
\tau_2^1 &= \tau_2^2 \\
\tau_3^1 &= \tau_3^2 \\
\tau_4^1 &= \tau_4^2 \\
\tau_5^1 &= \tau_5^2 \\
\tau_6^1 &= \tau_6^2
\end{aligned} \tag{55}$$

Mittelwerte der manifesten Variablen (τ_x) und Mittelwertsdifferenzen der latenten Variablen (κ) für die Modellvariante 3

Modellvariante 3		
Item	τ_x	z-Wert
E0004	2.92	119.12
E0006	2.91	109.99
E0008	3.03	109.12
E0011	1.75	62.11
E0012	1.60	57.30
E0013	1.39	61.27
Faktor	κ	z-Wert
Empathie	0.06	2.06
Bestrafung	-0.07	-2.18