Mathematik I
WS 2014/15
6.Übungsblatt
Aufgaben für den 20.11.2014

1. **Vektorrechnung**

   Gegeben sei ein Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$.

   a) Bestimmen Sie seine Koordinaten so, dass er senkrecht auf die (y, z)-Ebene steht und die Länge 2 hat.

   b) Bestimmen Sie seine Koordinaten so, dass er in der (y, z)-Ebene liegt, mit der positiven z-Achse einen Winkel von 60° einschließt und ein Einheitsvektor ist.

2. **Produkte**

   Finden Sie alle Vektoren der Länge $\sqrt{2}$, die senkrecht auf den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ stehen und mit dem Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ einen Winkel von 60° einschließen.

3. **Spatprodukt**

   Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig? Falls ja, bilden Sie das Spatprodukt und berechnen Sie das Volumen des von den drei Vektoren aufgespannten Körpers.

4. **Lage von Vektoren**

   Seien A, B, und C drei Punkte in $\mathbb{R}^3$. Die von diesen Punkten aufgespannte Ebene E kann auf drei äquivalente Arten dargestellt werden

   - Parameterdarstellung: Ein Punkt P liegt genau dann in E, wenn er für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ folgende Gleichung erfüllt:

     $$\vec{P} = \vec{A} + \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC}$$

   - Normalvektordarstellung: Sei $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$ der Normalvektor der Ebene. Ein Punkt P liegt genau dann in E, wenn er folgende Gleichung erfüllt:

     $$\left\langle \vec{P} - \vec{A}, \vec{n} \right\rangle = 0.$$

   - Koordinatenform: Seien $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ und $d = \langle \vec{A}, \vec{n} \rangle$. Ein Punkt $P = (P_x|P_y|P_z)$ liegt genau dann in E, wenn er folgende Gleichung erfüllt:

     $$P_x n_x + P_y n_y + P_z n_z = d.$$

(a) Wie muss die Zahl λ gewählt werden, sodass die Summe $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ orthogonal zu dem Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ steht?

(b) Wie muss die Zahl z gewählt werden, damit der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -13 \\ 12 \\ z \end{pmatrix}$ mit den Vektoren $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ in einer Ebene liegt?

5. **Geraden, Ebenen**

(a) Berechnen Sie den Abstand des Punktes $A = (0|5|7)$ zur Gerade $g : P = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(b) Berechnen Sie den Abstand des Punktes $A = (0|5|7)$ zur Ebene E, die durch den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und den Punkt $P = (-1|4|1)$ bestimmt ist.

6. **Lorentzkraft**

Ein zeitlich konstanter Strom der Stärke $I = 5$ fließt in der Zeit $t = \frac{1}{2}$ durch einen geraden Leiter mit gerichteter Länge $\vec{l} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Zusätzlich wirkt ein homogenes, zeitlich konstantes Magnetfeld $\vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ auf den Leiter. Berechnen Sie den Betrag der auf den Leiter wirkenden Lorentzkraft.

Hinweis: Verwenden Sie folgenden Zusammenhang für die Gesamtladung Q

$$Q = It.$$