Mathematik I
WS 2014/15
8.Übungsblatt
Aufgaben für den 04.12.2014

1. **Rechnen mit komplexen Zahlen**

   (a) Berechnen Sie die Polar- und Exponentialformen von $z_1 = 1 + i$ und $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$.

   (b) Bestimmen Sie die kartesische Darstellung von $z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

   (c) Seien $z_1 = 2 + 3i$ und $z_2 = 3 - 2i$. Stellen Sie $z_1\bar{z}_2$, iz_2^2, $\frac{z_1}{z_2}$ und $(z_1 - z_2)^{-2}$ in der kartesischen Form dar.

2. **Potenzen komplexer Zahlen**

   Bestimmen Sie den Betrag und das Argument der komplexen Zahlen $z_1 = (e^{-i\frac{\pi}{4}})^{10}$, $z_2 = (1 + i)^{10}$ und $z_3 = (-1 - i)^{10}$ und veranschaulichen Sie die Ergebnisse in der komplexen Zahlenebene.

3. **Formeln von de Moivre**

   Zeigen Sie mittels der Formeln von Moivre, dass

   $$\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi = (4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi) + i(3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi)$$

   und schließen Sie daraus die speziellen Formeln aus der Vorlesung, d.h.

   $$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$$

   und

   $$\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi.$$

4. **Wurzeln komplexer Zahlen**

   (a) Bestimmen Sie die 3-ten Einheitswurzeln ζ_k für $k = 0, 1, 2$.

   (b) Berechnen Sie die dritten Wurzeln von i in der kartesischen Darstellung.

   (c) Finden Sie die kartesischen Darstellungen der zweiten Wurzeln von $(-1 + i)^2$.

   Veranschaulichen Sie alle Ergebnisse in der komplexen Zahlenebene.

5. **Potenzen und Wurzeln komplexer Zahlen**

   Berechnen Sie die kartesische Darstellung von $(1 + \sqrt{3}i)^{-1/2}$.

Anwendung der komplexen Zahlen in der Wechselstromrechnung:

Wechselstromkreise können unter Verwendung der komplexen Zahlen auf sehr einfache Weise mit denselben Regeln wie für Gleichstromkreise berechnet werden.

Hinweis zur Notation: In der Elektrotechnikliteratur wird der (zeitabhängige) Strom typischerweise mit i und die komplexe Einheit mit j notiert. Komplexwertige Größen (wie Spannung, Stromstärke) werden durch Unterstreichen gekennzeichnet. Der Einfachheit halber behalten wir die Schreibweise aus der Vorlesung bei, d.h. $i^2 = -1$.

6. **Schaltung**

Durch die unten abgebildete Schaltung mit $C = 10\mu F$, $L = 10mH$ und $R = 10\Omega$ fließt ein komplexer Strom von $\underline{I} = 410A$ mit $\omega = 2\pi f$ und $f = 10^3 s^{-1}$.

(a) Bestimmen Sie den komplexen Gesamtwiderstand der Schaltung $\underline{Z}_{ges} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$, wobei $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_C = \frac{1}{i\omega C}$ und $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_L + \underline{Z}_R$ mit $\underline{Z}_L = i\omega L$ und $\underline{Z}_R = R$.

(b) Berechnen Sie die komplexe Spannung an der Schaltung mittels des Ohmschen Gesetzes, d.h. $\underline{U} = \underline{Z}_{ges} \cdot \underline{I}$.

(c) Finden Sie mittels der Beziehung $\underline{U} := Ue^{i\varphi}$ die reelle Amplitude U der komplexen Spannung und die zugehörige Phasenverschiebung φ zwischen Strom und Spannung.

(d) Berechnen Sie den komplexen Strom $\underline{I}_1$ der durch den Kondensator fließt, sowie den komplexen Strom $\underline{I}_2$ der durch die Spule und den Ohmschen Widerstand fließt via

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_C} \qquad \text{und} \qquad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_2}.$$

(e) Überprüfen Sie die Kirchhoffsche Regel $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$ mittels der berechneten Ergebnisse.