Mathematik I
WS 2014/15
10.Übungsblatt
Aufgaben für den 18.12.2014

1. **Folgen**

   Überprüfen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und berechnen Sie, falls existent, die dazugehörigen Grenzwerte.

   a) $a_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2}$

   b) $b_n = \frac{n^2}{n^2+2n}$

   c) $c_n = \frac{n}{n!}$

   d) $d_n = \frac{7n^2+2}{3n^3-2n}$

2. **Rekursive Folgen**

   Überprüfen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz.

   a) $b_1 = 1, \qquad b_{n+1} = \frac{b_n}{n}$

   b) $c_1 = 1, \qquad c_{n+1} = c_n - 1 + e^{-c_n}$

   Hinweis: Verwenden Sie für den Teil b) die Tatsache, dass

   $$a \le b \Rightarrow a + e^{-a} \le b + e^{-b} \qquad\qquad a, b \in (0, \infty).$$

3. **Konvergenzsätze**

   a) Zeigen Sie, dass für zwei konvergente Folgen reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

   $$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

   stets

   $$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$$

   gilt.

   Hinweis: Verwenden Sie dazu die folgenden Aussagen:

   $$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b,$$
   $$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{und} \quad (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ beschränkt} \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = 0.$$

   b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen mit

   $$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

   Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $m \in \mathbb{N}$

   $$\lim_{n\to\infty} (a_n)^m = a^m$$

   gilt.

4. **Folgen, Rydberg-Formel**

   a) Untersuchen Sie den Grenzwert der Folge

   $$a_n = \left(\frac{c+1}{c-1}\right)^n$$

   in Abhängigkeit von dem reellen Parameter $c \neq 1$.

   b) Die Wellenzahl $\tilde{\nu}$ der einzelnen Spektrallinien eines Wasserstoffatoms wird durch die Rydberg-Formel beschrieben

   $$\tilde{\nu} = R\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)$$

   wobei $R = 1.1 \cdot 10^7 m^{-1}$ die Rydberg-Konstante bezeichnet. $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ sind die Hauptquantenzahlen der zugehörigen Orbits: das Elektron wechselt dabei vom energiereicheren Orbit n_2 auf den tiefer gelegenen Orbit n_1. Berechnen Sie für $n_1 = 1$ und $n_1 = 2$ die Grenzwellenzahl

   $$\tilde{\nu}_G = \lim_{n_2 \to \infty} R\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right).$$

5. **Folgen**

   Ein Pendel mit Periode s wird zu Beginn jeder Periode durch einen Stoß angeregt. Die Gesamtenergie des Pendels wird durch den Stoß um 1 Joule erhöht, bis zum Ende der Periode verringert sich die Gesamtenergie um 4%.

   Stellen Sie eine rekursive Folge a_n für die Gesamtenergie des Pendels auf und weisen Sie die Konvergenz der Folge nach, wenn die Gesamtenergie am Anfang Null ist (d.h. $a_1 = 0$, das Pendel verharrt unausgelenkt in Ruhe).

   Hinweis: Eine vernünftige obere Schranke für a_n ist dabei 24.