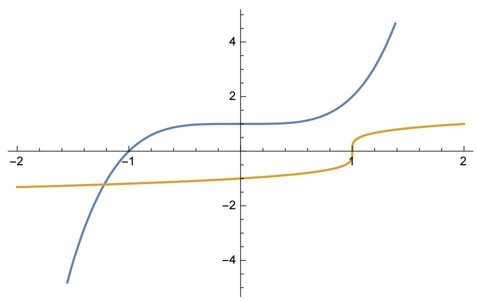
Beispiel 36

Ist die Abbildung $f : A \to B$ bijektiv, so existiert die Unkehrabbildung (inverse Funktion) $f^{-1} : B \to A$, die auch bijektiv ist. Also die inverse funktion $f^{-1}(x)$ zur Funktion

$$f(x) = x^3 \cdot |x| + 1$$

muss auch bijektiv sein und damit ist diese Funktion auch streng monoton wachsend. Die skizze zeigt die Funktion $f(x)$ sowie die entsprechende inverse Funktion $f^{-1}(x)$. Die beide Funktione sind stetig auf $\mathbb{R}$ und streng monoton wachsend.



Berechnung von $f^{-1}(x)$. Wir untescheiden zwei Fälle:

Fall 1. Wenn $x \geq 0$ ist, dann gilt

$$\begin{aligned} &f(x) = x^4 + 1, \\ &x^4 = f(x) - 1 \\ &x = \pm\sqrt[4]{f(x) - 1}. \end{aligned}$$

Da $x \geq 0$ ist, nehmen wir nur die positive Lösung $x = \sqrt[4]{f(x) - 1}$.

Fall 2. Wenn $x < 0$ ist, dann gilt

$$\begin{aligned} &f(x) = -x^4 + 1, \\ &x^4 = 1 - f(x), \\ &x = \pm\sqrt[4]{1 - f(x)}. \end{aligned}$$

Da $x < 0$ ist, nehmen wir nur die negative Lösung $x = -\sqrt[4]{1 - f(x)}$.

Jetzt fassen wir zwei Fälle zusammen und bekommen wir damit die folgende inverse Funktion:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[4]{x-1} & x \geq 1, \\ -\sqrt[4]{1-x} & x < 1. \end{cases}$$