Beispiel 5 Matrixdarstellung der Rotation um y-Achse

$$D_y = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$

Eigenwerte:

$$\det(D_y - \lambda \cdot E) = \begin{vmatrix} \cos\beta-\lambda & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta-1 \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda\cos\beta+1)$$

$\lambda = 1$ ist der einzige reelle Eigenwert.

Eigenvektor zum $\lambda = 1$:

$$(D_y - E)\vec{X}_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} \cos\beta-1 & 0 & \sin\beta \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

x_2 ist freiwählbar; $x_1 = x_3 = 0$

$\Rightarrow$ Eigenvektor $\vec{X}$ zum Eigenwert $\lambda = 1$: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Eigenraum: $E_{D_y,1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Bemerkung Besitzt die Matrixdarstellung einer Abbildung lediglich den Eigenwert $\lambda = 1$ und ist dessen Vielfachheit gleich 1, hat also das charakteristische Polynom die Form

$$\chi_{D_y}(z) = (z-1)(z^2 - 2z\cos\beta + 1),$$

so handelt es sich bei der Abbildung um eine Drehung mit der Drehachse $\vec{X}$ um den Winkel β.