§9 Die kontinuierliche bewertete Markov-Kette

9.1 Bewertete Markov-Kette mit kontinuierlicher Zeit

Genau so wie der kontinuierliche Zeitbegriff uns veranlasst, an Übergangsraten zu denken anstatt an Übergangswahrscheinlichkeiten, so müssen wir auch den Erlösbegriff umdefinieren.

Wir nehmen an, dass das System einen Erlös von $c_{i\,i}$ Dollars pro Zeiteinheit einbringt während der ganzen Zeit, in der es den Zustand $i \in E$ besetzt. Ferner nehmen wir an, dass das System, wenn es einen Übergang macht vom zustand i zum Zustand j $(i \neq j)$, einen Erlös von $c_{i\,j}$ Dollars erhält.

9.1.1 Bemerkung: Man beachte, dass $c_{i\,i}$ (Erlöserate) und $c_{i\,j}$ (Übergangserlöse) verschiedene Dimensionen haben.

Es ist nicht nötig, dass das System sowohl an den Erlösraten als auch an den Übergangserlösen verdient, doch ergeben diese Definitionen den allgemeinen Fall.

Wir interessieren uns nun für die zu erwartenden Erlöse des Systems, wenn es während einer Zeit t mit einer gegebenen Anfangsbedingung in Betrieb ist.

9.1.2 Definition: $\mathrm{v}_i(t)$ – der total zu erwartende Erlös, den das System in der Zeit t einbringt, wenn es im Zustand $i \in E$ startet.

Bezeichnen wir mit

$$\mathbf{v}(t) = (\mathrm{v}_1(t), \mathrm{v}_2(t), \ \ldots, \mathrm{v}_N(t))'$$

Für die Funktion $\mathrm{v}_i(t)$, $i \in E$, und den Vektor $\mathbf{v}(t)$ gilt die Behauptung:

9.1.3 Satz: Für die total zu erwartende Erlöse gilt das System von Differentialgleichungen

$$\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{v}_i(t) = q_i + \sum_{j=1}^{N} a_{i\,j}\,\mathrm{v}_j(t), \quad i \in E \tag{9.1}$$

oder in Matrixschreibweise

$$\frac{d}{d\,t}\,\mathbf{v}(t) = \mathbf{q} + \mathbf{A}\,\mathbf{v}(t), \tag{9.2}$$

wobei

$$q_i = c_{i\,i} + \textstyle\sum_{j \neq i} a_{i\,j}\, c_{i\,j} \tag{9.3}$$

man als Erlöserate definiert, und

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ \ldots, q_N)'.$$

▼

Beweis: Wir können den total zu erwartenden Erlös in der Zeit $t + d\,t$, $\mathrm{v}_i(t + d\,t)$, $i \in E$, mit $\mathrm{v}_i(t)$ mittels der folgenden Gleichung in Verbindung bringen. Mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit erhält man also

(9.4) $$\mathrm{v}_i(t + ⅆt) = (1 - \sum_{j \neq i} a_{i\,j}\, ⅆt)\,(c_{i\,i}\, ⅆt + \mathrm{v}_i(t)) + \sum_{j \neq i} a_{i\,j}\, ⅆt (c_{i\,j} + \mathrm{v}_j(t)),\; i \in E.$$

Gleichung (9.4) kann folgendermassen interpretiert werden. Während des Intervalls $ⅆt$ kann das System im Zustand $i \in E$ verbleiben oder einen Übergang zu irgendeinem anderen Zustand $j \in E$ machen. Bleibt es für eine Zeit $ⅆt$ im Zustand i, wird es einen Erlös $c_{i\,i}\, ⅆt$ und den zu erwarten den zu erwartenden Erlös $\mathrm{v}_i(t)$ für die verbleibenden t Zeiteinheiten einbringen. Die Wahrscheinlichkeit, dass es während der Zeit $ⅆt$ im Zustand i bleibt, ist 1 abzüglich der Wahrscheinlichkeit eines Überganges in $ⅆt$, also $1 - \sum_{j \neq i} a_{i\,j}\, ⅆt$.

Anderseits kann das System einen Übergang zu irgendeinem Zustand $j \neq i$ während des Intervalls $ⅆt$ mit der Wahrscheinlichkeit $a_{i\,j}\, ⅆt$ machen. In diesem Fall würde dem System ein Erlös $c_{i\,j}$ und der zu erwartende Erlös $v_j(t)$ zukommen, der erzielt würde, wenn es im Zustand $j \in E$ starten würde mit der verbleibenden Zeit t. Das Produkt aus Wahrscheinlichkeit und Belohnung muss über alle Zustände $j \neq i$ summiert werden, um den totalen Beitrag zu den Erwartungswerten zu erhalten.

Setzt man Gleichung (8.2) in Gleichung (9.4) ein, so folgt

$$\mathrm{v}_i(t + ⅆt) = (1 + a_{i\,i}\, ⅆt)\,(c_{i\,i}\, ⅆt + \mathrm{v}_i(t)) + \sum_{j \neq i} a_{i\,j}\, ⅆt (c_{i\,j} + \mathrm{v}_j(t)),\; i \in E$$

oder

$$\mathrm{v}_i(t + ⅆt) = c_{i\,i}\, ⅆt + \mathrm{v}_i(t) + a_{i\,i}\, \mathrm{v}_i(t)\, ⅆt + \sum_{j \neq i} a_{i\,j}\, c_{i\,j}\, ⅆt + \sum_{j \neq i} a_{i\,j}\, \mathrm{v}_j(t),\; i \in E,$$

wobei die Glieder höherer Ordnung als $ⅆt$ vernachlässigt wurden.

Schliesslich, wenn wir $\mathrm{v}_i(t)$, $i \in E$, von beiden Seiten der Gleichung abziehen und durch $ⅆt$ dividieren, erhalten wir

$$\frac{\mathrm{v}_i(t + ⅆt) - \mathrm{v}_i(t)}{ⅆt} = c_{i\,i} + \sum_{j \neq i} a_{i\,j}\, c_{i\,j} + \sum_{j=1}^{N} a_{i\,j}\, \mathrm{v}_j(t),\; i \in E.$$

Wenn wir den Limes für $ⅆt \to 0$ bilden, erhalten wir

$$\frac{ⅆ}{ⅆt}\, \mathrm{v}_i(t) = c_{i\,i} + \sum_{j \neq i} a_{i\,j}\, c_{i\,j} + \sum_{j=1}^{N} a_{i\,j}\, \mathrm{v}_j(t),\; i \in E.$$

Nun haben wir ein System von N linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, die die $\mathrm{v}_i(t)$, $i \in E$, vollständig bestimmen, wenn die $\mathrm{v}_i(0)$, $i \in E$, bekannt sind.

Wir difinieren eine Grösse q_i, $i \in E$, als die Erlösrate des Systems,

(9.3) $$q_i = c_{i\,i} + \sum_{j \neq i} a_{i\,j}\, c_{i\,j}.$$

Durch Anwendung der Definition der Erlösrate ergibt sich aus underen Gleichungen

(9.1) $$\frac{ⅆ}{ⅆt}\, \mathrm{v}_i(t) = q_i + \sum_{j=1}^{N} a_{i\,j}\, \mathrm{v}_j(t),\;\; i \in E.$$

Die Gleichungen (9.6) bilden ein System von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, das den gesamten erlös in der Zeit t mit dem Anfangszustand i zu den Grössen q_i und $a_{i\,j}$ in Beziehung setzt.

Wenn $\mathbf{v}(t) = (\mathrm{v}_1(t), \mathrm{v}_2(t), \ldots, \mathrm{v}_N(t))'$ als Spaltenvektor mit den Komponenten $\mathrm{v}_i(t)$, $i \in E$, den total zu erwartenden Erlösen, definiert wird und $\mathbf{q}$ als Erlösraten-Vektor mit den Komponenten q_i, $i \in E$, dann können die Gleichungen (8.17) folgendermassen in Matrixschreibweise dargestellt werden:

(9.2) $$\frac{ⅆ}{ⅆt}\, \mathbf{v}(t) = \mathbf{q} + \mathbf{A}\, \mathbf{v}(t).$$

Zum Beispiel könnte im Problem des Werkmeisters die Maschine Erlösraten

$$q_1 = 6,\; q_2 = -3$$

haben. Diese Erlösraten könnten sich aus vielen verschiedenen Kombinationen von erlösen pro Zeit und Übergangserlösen ergeben. Wenn der Erlös pro Zeit im ersten Zustand $6 betragen würde und der Erlös pro Zeit im zweiten Zustand –$3, und wenn es keine Übergangserlöse gäbe, wäre

$$c_{11} = 6,\ c_{22} = -3,\ c_{12} = c_{21} = 0,$$

und wir würden somit die soeben erwähnten erlösraten erhalten.

In einem späteren Abschnitt werden wir die q_i betrachten, die sich zum Teil durch Übergangserlöse ergeben, doch im Moment ist das unwesentlich.

9.2 Untersuchung kontinuierliche bewertete Markov-Kette mit Hilfe der Laplace-Transformation

Um für die Gleichung (9.2) eine Lösung zu erhalten, müssen wir natürlich $\mathbf{v}(0)$ spezifizieren. Da Gleichung (9.2) eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffitienten darstellt, sollte die Laplace-Transformation eine brauchbare Lösungsmethode darstellen.

9.2.1 Satz: Für die Laplace-Transformierte $\boldsymbol{v}(s)$ des Vektors $\mathbf{v}(t)$ gilt

(9.5) $$\boldsymbol{v}(s) = \frac{1}{s}\,(s\,\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{q} + (s\,\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{v}(0).$$

Dabei ist $\mathbf{I}$ die Einheitsmatrix.

▼

Beweis:

Wenn wir die Laplace-Transformierte der Gleichung (9.2)

$$\frac{d}{dt}\,\mathbf{v}(t) = \mathbf{q} + \mathbf{A}\,\mathbf{v}(t)$$

gemäss der Tabelle aus dem Abschnitt 8.3 bestimmen, dann erhalten wir:

$$s\,\boldsymbol{v}(s) - \mathbf{v}(0) = \frac{1}{s}\,\mathbf{q} + \mathbf{A}\,\boldsymbol{v}\,(s)$$

oder

$$(s\,\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\boldsymbol{v}(s) = \frac{1}{s}\,\mathbf{q} + \boldsymbol{v}(0)$$

und schliesslich

$$\boldsymbol{v}(s) = \frac{1}{s}\,(s\,\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{q} + (s\,\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{v}(0).$$

Wir stellen fest, dass die Gleichung (9.5) $\boldsymbol{v}(s)$ – die Laplace-Transformierte von $\mathbf{v}(t)$ –in Beziehung bringt zu $(s\,\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, dem Erlösratenvektor $\mathbf{q}$ und dem enderlösvektor $\mathbf{v}(0)$. Den Vektor $\mathbf{v}(t)$ bestimmt man mittels der inversen Transformation der Gleichung (9.5).

Wir behandeln nun das Problem des Werkmeisters.

Wir wollen das Ergebniss (Gleichung (9.19)) auf das Problem des Werkmeisters anwenden. Die Übergangsraten-Matrix und der Erlösratenvektor sind

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 4 & -4 \end{pmatrix},\ \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Wir nehmen an, dass die Maschine bei $t = 0$ weggeworfen wird, so dass

$$\mathrm{v}_1(0) = \mathrm{v}_2(0) = 0$$

ist. Für dieses Problem stellten wir früher fest, dass

$$(s\,\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{s+4}{s(s+9)} & \frac{5}{s(s+9)}\\ \frac{4}{s(s+9)} & \frac{s+5}{s(s+9)}\end{pmatrix}.$$

Um die Gleichung (9.5) zu verwenden, müssen wir

$$\frac{1}{s}\,(s\,\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{s+4}{s^2(s+9)} & \frac{5}{s^2(s+9)}\\ \frac{4}{s^2(s+9)} & \frac{s+5}{s^2(s+9)}\end{pmatrix}.$$

Durch Partialbruchzerlegung erhalten wir

$$\frac{1}{s}\,(s\,\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{\frac{4}{9}}{s^2}+\frac{\frac{5}{81}}{s}+\frac{-\frac{5}{81}}{s+9} & \frac{\frac{5}{9}}{s^2}+\frac{-\frac{5}{81}}{s}+\frac{\frac{5}{81}}{s+9}\\ \frac{\frac{4}{9}}{s^2}+\frac{-\frac{4}{81}}{s}+\frac{\frac{4}{81}}{s+9} & \frac{\frac{5}{9}}{s^2}+\frac{\frac{4}{81}}{s}+\frac{-\frac{4}{81}}{s+9}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{s^2}\begin{pmatrix}\frac{4}{9} & \frac{5}{9}\\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9}\end{pmatrix}+\frac{1}{s}\begin{pmatrix}\frac{5}{81} & -\frac{5}{81}\\ -\frac{4}{81} & \frac{4}{81}\end{pmatrix}+\frac{1}{s+9}\begin{pmatrix}-\frac{5}{81} & \frac{5}{81}\\ \frac{4}{81} & -\frac{4}{81}\end{pmatrix}.$$

Somit ist, da

$$\boldsymbol{v}(s)=\frac{1}{s}\,(s\,\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{q},$$

nach der inversen Transformation

$$\mathbf{v}(t)=\left(t\begin{pmatrix}\frac{4}{9} & \frac{5}{9}\\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{5}{81} & -\frac{5}{81}\\ -\frac{4}{81} & \frac{4}{81}\end{pmatrix}+e^{-9\,t}\begin{pmatrix}-\frac{5}{81} & \frac{5}{81}\\ \frac{4}{81} & -\frac{4}{81}\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}6\\ -3\end{pmatrix}$$

oder

$$\mathbf{v}(t)=t\begin{pmatrix}6\\ -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{5}{9}\\ -\frac{4}{9}\end{pmatrix}+e^{-9\,t}\begin{pmatrix}-\frac{5}{9}\\ -\frac{4}{9}\end{pmatrix}.$$

Der gesamte erwartete Erlös in der Zeit t beträgt daher, wenn das System im Zustand 1 gestartet wird,

$$\mathrm{v}_1(t)=t+\frac{5}{9}-\frac{5}{9}\,e^{-9\,t}$$

und bei dem Anfangszustand 2

$$\mathrm{v}_1(t)=t-\frac{4}{9}+\frac{4}{9}\,e^{-9\,t}.$$

Man beachte, dass ohne Rücksicht aud den Anfangszustand die Maschine durchschnittlich $1 pro Zeiteiheit einbringen wird für grosse t, weil der Koeffizient von t in $\mathrm{v}_1(t)$ und $\mathrm{v}_2(t)$ gleich 1 ist.

Den durchschnittlichen Erlös pro Zeiteiheit für ein System nennt man den Gewinn des Systems analog zum diskreten Fall.

9.3 Das asymptotische Verhalten

Wie früher hängt der Gewinn vom Startzustand ab, wenn das System mit mehreren ergodischen Klassen ist. Wir sehen auch, dass für grosse t die Grössen $\mathrm{v}_1(t)$ und $\mathrm{v}_2(t)$ in der Form

$$\mathrm{v}_i(t)=g_i\,t+\mathrm{v}_i,\quad i\in E$$

geschrieben werden können. Im obigen Fall ist also

$$v_1 = \frac{5}{9},\ v_2 = -\frac{4}{9}.$$

Nun wollen wir beweisen, dass diese Beziehung in einer allgemeiner kontinuierlichen Markov-Kette erhalten bleibt.

9.3.1 Satz: Der Vektor $\mathbf{v}(t)$ für $t \to \infty$ strebt asymptotisch gegen

(9.6) $$\mathbf{v}(t) = t\,\mathbf{S}\,\mathbf{q} + \mathcal{T}(0)\,\mathbf{q} + \mathbf{S}\mathbf{v}(0),$$

wobei $\mathcal{T}(s)$ eine Laplace-Transformierte von $\mathbf{T}(t)$ ist.

Wenn man einen Vektor $\mathbf{g}$ mit den Komponenten g_i durch

(9.7) $$\mathbf{g} = \mathbf{S}\,\mathbf{q}$$

definiert, dann folgt

$$\mathbf{v}(t) = t\,\mathbf{g} + \mathcal{T}(0)\,\mathbf{q} + \mathbf{S}\mathbf{v}(0).$$

▼

Beweis:

Gleichung (9.5) lautet

(9.5) $$\boldsymbol{v}(s) = \frac{1}{s}\,(s\,\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{q} + (s\,\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{v}(0).$$

Von Gleichung (8.11) wissen wir, dass

(8.11) $$(s\,\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{s}\,\mathbf{S} + \mathcal{T}(s),$$

wobei $\mathbf{S}$ die Matrix der Grenzwahrscheinlichkeiten ist und $\mathcal{T}(s)$ aus Transformierten von rein transienten Komponenten besteht. wird Gleichung (8.11) in Gleichung (9.5) eingesetzt, dann erhalten wir

$$\boldsymbol{v}(s) = \frac{1}{s}\,\left(\frac{1}{s}\,\mathbf{S} + \mathcal{T}(s)\right)\mathbf{q} + \left(\frac{1}{s}\,\mathbf{S} + \mathcal{T}(s)\right)\mathbf{v}(0)$$

oder

(9.8) $$\boldsymbol{v}(s) = \frac{1}{s^2}\,\mathbf{S}\mathbf{q} + \frac{1}{s}\,\mathcal{T}(s)\,\mathbf{q} + \frac{1}{s}\,\mathbf{S}\mathbf{v}(0) + \mathcal{T}(s)\,\mathbf{v}(0).$$

Wir werden nun das Verhalten von $\mathbf{v}(t)$ für grosse t untersuchen, indem wir das Verhalten jeder Komponente der Gleichung (9.8) bestimmen.

- Der erste Ausdruck

$$\frac{1}{s^2}\,\mathbf{S}\,\mathbf{q}$$

stellt eine Steigung der Grösse $\boldsymbol{S}\,\boldsymbol{q}$ dar.

- Der zweite Ausdruck

$$\frac{1}{s}\,\mathcal{T}(s)\,\mathbf{q}$$

entspricht der Funktion mit exponetial abnehmenden Komponenten, also setzen wir

$$\mathcal{T}(s) = \sum_i \frac{D_i}{s-\alpha_i},$$

wobei D_i die Matrizen, die von s nicht abhängig sind, und $\alpha_i < 0$ die charakteristische Werte sind. Daraus folgt

$$\frac{1}{s}\,\mathcal{T}(s) = \sum_i \left(-\frac{D_i/\alpha_i}{s} + \frac{D_i/\alpha_i}{s-\alpha_i}\right)$$

diese Laplace-Transformierte entschpricht also der Funktion

$$\sum_i (-\frac{D_i}{\alpha_i}) + \sum_i e^{\alpha_i t} \frac{D_i}{\alpha_i}$$

Zweite Term ist Null, wenn $t \to \infty$, und

$$\sum_i (-\frac{D_i}{\alpha_i}) = \mathcal{T}(0)$$

Also die Laplace-Transformierte $\frac{1}{s}\,\mathcal{T}(s)\,\mathbf{q}$ für grosse t entspricht der Grösse $\mathcal{T}(0)\,\mathbf{q}$.

- Der Ausdruck

$$\frac{1}{s}\,\mathbf{Sv}(0)$$

stellt eine konstante Grösse $\mathbf{Sv}(0)$ dar.

- Der Term

$$\mathcal{T}(s)\,\mathbf{v}(0)$$

bezieht sich auf transiente Komponenten, welche für grosse t verschwinden.

Somit hat $\mathbf{v}(t)$ für grosse t die Form

$$\mathbf{v}(t) = t\,\mathbf{S}\,\mathbf{q} + \mathcal{T}(0)\,\mathbf{q} + \mathbf{Sv}(0).$$

Wenn ein Vektor $\mathbf{g}$ aus Zustandsgewinnen g_i, $i \in E$, definiert wird gemäss

$$\mathbf{g} = \mathbf{S}\,\mathbf{q}.$$

9.3.2 Definition: Wir bezeichnen die Ordinatenabschnitte der Asymptoten mit v_i, $i \in E$, d.h.

(9.9) $\qquad \mathbf{v} = \mathcal{T}(0)\,\mathbf{q} + \mathbf{Sv}(0),\ \ i \in E.$

9.3.3 Satz: Für die Ordinatenabschnitte $\mathrm{v}_i(t)$ mit $t \to \infty$ gilt

(9.10) $\qquad \mathrm{v}_i(t) = t\,g_i + \mathrm{v}_i,\ i \in E,\ t \geq 0.$

Bezeichnen wir den Spaltenvektor $\mathbf{v} = (\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ \ldots, \mathrm{v}_N)'$, dann ist

(9.11) $\qquad \mathbf{v}(t) = t\,\mathbf{g} + \mathbf{v}.$

▼

Beweis: Folgt unmittelbar aus (9.6).

Wir sehen, dass der total zu erwartende Erlös für die Zeit t für ein kontinuierliches System, das gestartet wird im Zustand $i \in E$, die gleiche form hat, wie die entsprechende Grösse im diskreten Fall (vii), mit der Ausnahme, dass n durch t ersetzt wurde.

■ Wir behandeln nun das Problem des Werkmeisters.

Für das Problem des Werkmeisters ist

$$(s\,\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{s}\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} + \frac{1}{s+9}\begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{5}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} = \frac{1}{s}\,\mathbf{S} + \mathcal{T}(s),$$

so dass

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}, \ \mathcal{T}(0) = \begin{pmatrix} \frac{5}{81} & -\frac{5}{81} \\ -\frac{4}{81} & \frac{4}{81} \end{pmatrix}.$$

Ferner ist

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Aus Gleichung (9.7) ergibt sich

$$\mathbf{g} = \mathbf{S}\,\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und aus Gleichung (9.9) folgt, da $\mathbf{v}(0) = (0,\ 0)'$ ist,

$$\mathbf{v} = \mathcal{T}(0)\,\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \frac{5}{81} & -\frac{5}{81} \\ -\frac{4}{81} & \frac{4}{81} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} \\ -\frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Folglich können wir nach Gleichung (9.10) für grosse t die $v_1(t)$ und $v_2(t)$ in der Form

$$v_1(t) = t + \frac{5}{9}, \ v_2(t) = t - \frac{4}{9}$$

schreiben.

Diese ausdrücke stimmen mit den früher festgestellten überein. Wir haben nun unsere Untersuchung der kontinuierlichen Markov-Kette mit gegebenen Erlösraten in jedem Zustand beendet. Der Leser sollte die Resultate des in diesem abschnitt analysierten Problems des Werkmeisters mit denjenigen für das analoge Problem des Spielzeugfabrikanten vergleichen, um die Ähnlichkeiten und Verschiedenheiten der diskreten und kontinuierlichen Markov-Kette klar zu verstehen. Wir gehen nun über zum Studium des kontinuierlichen Entscheidungsproblems.