Markov-Ketten Übungen
WS 2016/17
1.Übungsblatt
Aufgaben für den 13.10.2016

1. Welche der folgenden Matrizen

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{(d)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   sind stochastisch? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Zeichnen Sie die Übergangsgraphen zu den folgenden Übergangsmatrizen P einer Markov-Kette $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$,

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Klassifizieren Sie die Zustände (positive rekurrent, transient, absorbiered).

3. Gegeben sei eine Markov-Kette $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit dem Zustandsraum $E = \{1, 2\}$ und mit der Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

   (a) Zeichnen Sie den Übergangsgraph zu dieser Matrix.
   (b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $f_{ii}(n)$, $i \in E$ (abhängig von n), dass die Markov-Kette, die in i startet in n Schritten das erte Mal nach i zurückkehrt. Stellen Sie diese Funktionen in Abhängigkeit von n graphisch dar.
   (c) Ermitteln Sie die mittlere Rückkehrzeit $m_{ii}, i \in E$. Hinweis: Verwenden Sie die folgende Beziehung,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n g^{n-2} = \frac{2-g}{(1-g)^2} \text{ für beliebige Werte } g < 1.$$

4. Zeigen Sie, dass eine Markow-Kette $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf dem Zustandsraum $E = \{1, 2, 3, 4\}$ und mit dem Übergangsgraph (siehe Abbildung 1) periodisch ist. Bestimmen Sie die Periode.

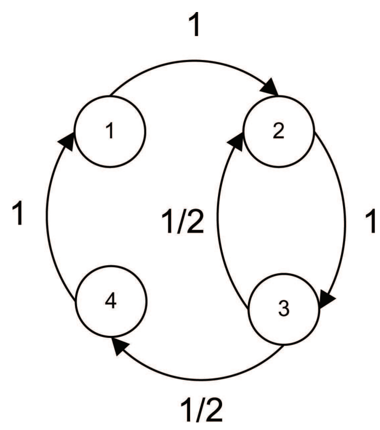

Abbildung 1: Übergangsgraph der Markov-Kette $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$