Markov-Ketten
WS 2016/17
4.Übungsblatt
Aufgaben für den 17.11.2016

1. Gegeben sei die Markov-Kette $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit drei Zuständen (Übergangsgraph in Abbildung 1).

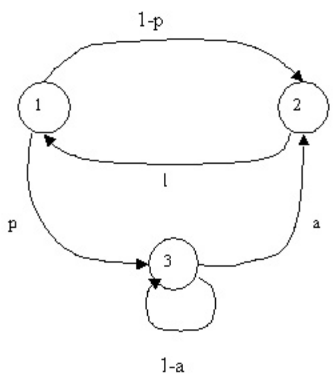

Abbildung 1: Übergangsgraph der Markov-Kette $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$

   a) Bestimmen Sie die Zustandsübergangsmatrix P der Markov-Kette $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.
   b) Welche Bedingungen müssen an die Wahrscheinlichkeiten a und p gestellt werden, damit die Markov-Kette irreduzibel und/oder aperiodisch ist?
   c) Bestimmen Sie den Gleichgewichtswahrscheinlichkeitsvektor $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$.
   d) Bestimmen Sie die mittlere Rückkehrzeit m_{ii} im Zustand $i = 2$.
   e) Für welche Werte von a und p gilt $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3$?

2. Gegeben sei eine Markov-Kette $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Zustandsraum $E = \{1, 2, \dots, 7\}$ und Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

   a) Ordnen Sie die Zustände gemäß ihren ergodischen Klassen und stellen Sie die Matrix P in kanonischer Form dar.
   b) Bestimmen Sie die stationäre Zustandsverteilung für jede ergodische Klasse sowie, wenn die Markov-Kette in dem transienten Zustand startet.

3. Gegeben ist eine bewertete Markov-Kette $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ mit dem Zustandsraum $E = \{1, 2\}$, wobei

$$\begin{aligned}
&p_{11}^1 = \frac{1}{2},\ p_{12}^1 = \frac{1}{2},\ p_{21}^1 = \frac{2}{3},\ p_{22}^2 = \frac{1}{3},\\
&p_{11}^2 = \frac{1}{4},\ p_{12}^2 = \frac{3}{4},\ p_{21}^2 = \frac{1}{3},\ p_{22}^2 = \frac{2}{3},\\
&q_1^1 = 1,\ q_1^2 = 0,\ q_2^1 = 2,\ q_2^2 = 5.
\end{aligned}$$

Bestimmen Sie die optimale Politik, die den erwarteten Erlös für die nächsten 3 Schritten maximiert.

4. Sei $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine bewertete Markov-Kette mit Zustandsraum $E = \{1, 2, 3\}$, Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

und den erwarteten unmittelbaren Erlösen $q_1 = 8$, $q_2 = 16$, $q_3 = 7$.

a) Bestimmen Sie den erwarteten Erlös $v_i(n), i \in E, n \in \mathbb{N}_0$ für $\mathbf{v}(0) = (0, 0, 0)'$ und stellen Sie diese Funktion für jeden Zustand i in abhängigkeit von n graphisch dar.

b) Ermitteln Sie fr den Fall $n \to \infty$ den Gewinn des Prozesses $g_i, i \in E$ mit Hilfe von den Grenzwahrscheinlichkeiten π_i sowie mit der relativen Werten $v_i, i \in E$. Sind alle g_i gleich gross? Begründen Sie das Ergebniss.

c) Bestimmen Sie die Asymptote für die Funktion $v_i(n)$, wenn $n \to \infty$ und zeichnen Sie diese zusammen mit der echten Funktion $v_i(n)$.

5. Gegeben ist eine bewertete Markov-Kette $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ mit dem Zustandsraum $E = \{1, 2\}$ und mit jeweils zwei möglichen Strategien a_1 und a_2 in jedem Zustand. Die Abbildung 2 zeigt die entsprechende Übergänge unter der Strategie a_1 bzw a_2 (ausgezogener bzw geschtrichelter Pfeil). Die zu erwartende unmittelbare Erlöse sind

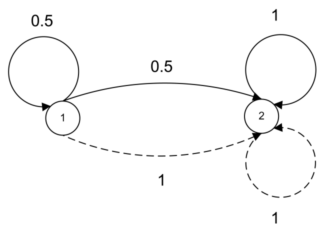

Abbildung 2: Übergangsgraph der Markov-Kette $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$

gleich

$$\begin{aligned}
&q_1^{a_1} = 5,\ q_1^{a_2} = -2,\\
&q_2^{a_1} = 14,\ q_2^{a_2} = -1.
\end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die optimale Politik $d(n)$, die den erwarteten Erlös für die nächsten n-Schritten maximiert, wobei $1 \leq n \leq 10$.

b) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, ab dem sich die optimale Politik ändert.

Zustand	Strategie	p_{ij}^k			q_i^k
1	1	0.6	0.3	0.1	10000
	2	1/3	1/3	1/3	9000
2	1	0.2	0.6	0.2	12000
	2	1/3	1/3	1/3	11000
3	1	0.1	0.3	0.6	14000
	2	1/3	1/3	1/3	13000

6. Die Daten sind für eine bewertete Markov-Kette $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ in folgender Tabelle zusammengefasst:

   a) Bestimmen Sie die Anzahl der möglichen Politiken. Schreiben Sie diese Politiken aus.

   b) Bestimmen Sie die optimale Politik $d(n)$, die den erwarteten Erlös für die nächsten n-Schritten maximiert, wobei $1 \leq n \leq 10$.

7. Die Daten sind für eine bewertete Markov-Kette $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ in folgender Tabelle zusammengefasst:

Zustand	Strategie	p_{ij}^k			c_{ij}^k		
1	1	0.6	0.2	0.2	10	4	8
	2	0.7	0.2	0.1	8	2	4
	3	0.8	0.1	0.1	4	6	4
2	1	0.1	0.8	0.1	10	2	8
	2	0.2	0.7	0.1	6	4	2
3	1	0.6	0.0	0.4	4	0	8

Der Prozess $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ethlt viele Übergenge, so dass $n \to \infty$ angenommen werden kann.

   a) Bestimmen Sie die Anzahl der möglichen Politiken. Schreiben Sie diese Politiken aus.

   b) Bestimmen Sie den Gewinn des Prozesses für jede einzelne Politik und verwenden Sie dafür die Grenzwahrscheinlichkeiten. Bestimmen Sie die optimale Politik, die zum maximalen Wert g entspricht.

   c) Bestimmen Sie die optimale Politik mit der Politik-Iteration. Wieviel Iterationsschritten erforderlich sind, um die optimale Politik zu erreichen? Wie groß ist der maximale Gewinn des Prozesses g.