Markov-Ketten
WS 2016/17
5.Übungsblatt
Aufgaben für den 01.12.2016

1. Ein Unternehmen verfüge über 1000 Stellen, die mit Mitarbeitern der Lohngruppen $L1$, $L2$ und $L3$ besetzt werden können. Momentan sind 60% in der Lohngruppe $L1$ und jeweils 20% in den Lohngruppen $L2$ und $L3$. Ein Mitarbeiter koste das Unternehmen 2000 GE in der Lohngruppe $L1$, 3000 GE in der Lohngruppe $L2$ und 4000 GE in der Lohngruppe $L3$. Damit entfallen momentan auf einen Mitarbeiter durchschnittlich 2600 GE. Das Unternehmen geht davon aus, dass in den Lohngruppen $L1$ und $L2$ jährlich jeweils 10% in die nächsthöhere Lohngruppe aufsteigen und in den Lohngruppen $L2$ und $L3$ jährlich jeweils 10% ausscheiden und durch neue Mitarbeiter ersetzt werden, die wieder in der Lohngruppe $L1$ beginnen. Beschreiben Sie die Entwicklung des Personalbestands durch eine Markov-Kette und berechnen Sie mit Hilfe der stationären Verteilung die langfristig zu erwartenden durchschnittlichen Kosten pro Mitarbeiter.

2. Sei $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine bewertete Markov-Kette mit dem Zustandsraum $E = \{1, 2, 3\}$ und Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

und die erwartete unmittelbare Erlöse

$$q_1 = 8,\ q_2 = 16,\ q_3 = 7.$$

   a) Ist die Markov-Kette $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ irreduzibel? Bestimmen Sie den Gewinn des Prozesses g mit Hilfe der stationären Verteilung $\boldsymbol{\pi}$ und mit der Wertbestimmung. Vergleichen Sie die Ergebnisse.

   b) Bestimmen Sie die erwartete Erlöse $v_i(n)$ fr $1 \le n \le 10, i \in E$. (z.B. mit der z-Transformierte).

   c) Bestimmen Sie die erwartete Erlöse $v_i(n)$ fr $1 \le n \le 10, i \in E$, fr den Diskontierungsfaktor $\beta = 0.9$. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit dem Punkt b).

3. Wie betrachten eine Markov-Kette $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit der Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

und Bewertungsmatrix

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

   a) Stellen Sie die Matrix P in kanonischer Form dar.

b) Bestimmen Sie den Gewinn des Prozesses g_i in Abhängigkeit vom Anfangszustand $i \in E$ und verwenden Sie dafür eine stochastische Matrix S (z-Transformierte).

c) Bestimmen Sie g_i mit den relativen Werten $v_i, i \in E$.

4. Übungsblatt 4, Aufgabe 5.

   a) Bestimmen Sie die optimale Politik sowie den optimalen Wert des Gewinns g mit der Anwendung der Politik-Iteration.

   b) Gegeben is ein Dieskontierungsfaktor $\beta = \{0.1, 0.2, 0.3, \ldots, 0.9\}$.

      1) Bestimmen Sie die erwartete Erlöse $v_i(n)$ für verschiedene β unter der Politik $(1,1),\ 1 \leq n \leq 10$.

      2) Bestimmen Sie die erwartete Erlöse $v_i(n)$ für verschiedene β unter der Politik $(2,2),\ 1 \leq n \leq 10$.

      3) Bestimmen Sie die optimale Politik in Abhängigkeit von β.

5. Nehmen Sie die bewertete Markov-Kette $\{X(n)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit der Daten aus der Aufgabe 4 (Übungsblatt 4). Bestimmen Sie eine optimale Politik fr die beschränkte Anzahl von Stufen n im Problem mit dem Diskontierungsfaktor β, wobei $\beta = \{0.1, 0.2, \ldots, 0.9\}$. Vergleichen Sie die Ergebnisse.

6. Nehmen Sie die bewertete Markov-Kette $\{X(n)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit der Daten aus der Aufgabe 7 (Übungsblatt 4). Bestimmen Sie eine optimale Politik fr die beschränkte Anzahl von Stufen n im Problem mit dem Diskontierungsfaktor β, wobei $\beta = \{0.1, 0.2, \ldots, 0.9\}$. Vergleichen Sie die Ergebnisse.