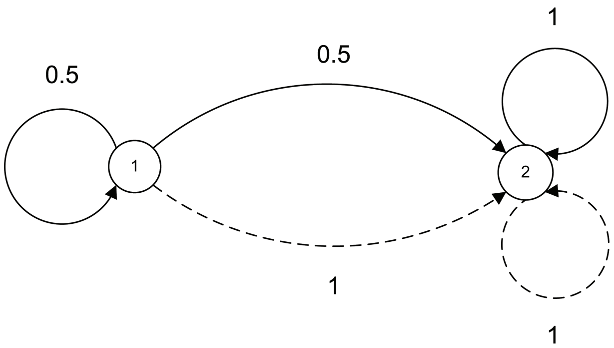
Markov-Ketten Übungen
WS 2016/17
6.Übungsblatt
Aufgaben für den 15.12.2016

1. Gegeben ist eine bewertete Markov-Kette $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit dem folgenden Übergangsgraph. In dieser Abbildung entspricht die durchgezogene Linie der Entschei-



dung 1 in jedem Zustand. Die geschtrichelte Linie entspricht der Entscheidung 2 in jedem Zustand. Die Bewertungen c_{ij} der Markov-Kette nehmen die folgenden Werten an,

$$c_{12}^1 = 6,\ c_{12}^2 = 6,$$
$$c_{22}^1 = 0.5,\ c_{22}^2 = -1.$$

Alle andere Bewertungen sind gleich 0.

a) Untersuchen Sie die Markov-Kette ohne Diskontierung, wenn das Beobachtungsintervall $n \in [0, 20] \cup \mathbb{N}_0$ endlich ist.
   1) Ermitteln Sie die optimale Politik mit der iterativen Lösung für verschiedene Zeitpunkten n.
   2) Bestimmen Sie die gesamte erwartete Erlöse bei n-Stufen unter der Annahme, dass die Entscheidungen 1 in jedem Zustand ausgewählt wurden.
   3) Bestimmen Sie die gesamte erwartete Erlöse bei n-Stufen unter der Annahme, dass die Entscheidungen 2 in jedem Zustand ausgewählt wurden.
   4) Zu welchem Zeitpunkt ist die Politik $(1, 1)$ besser geworden als die Politik $(2, 2)$.

b) Nehmen Sie an, dass $n \to \infty$.
   1) Ermitteln Sie die optimale Politik.
   2) Wie schnell konvergieren die zeitabhängige Entscheidungen gegen die Grenzwerte?

c) Betrachten Sie die Markov-Kette mit dem Diskontierungsfaktor

$$\beta = \{0.90, 0.91, \ldots, 0.99\}$$

und endlicher Zeitintervall n.

1) Bestimmen Sie die erwartete Erlöse für verschiedene β unter der Politik $(1,1)$.
2) Bestimmen Sie die erwartete Erlöse für verschiedene β unter der Politik $(2,2)$.
3) Bestimmen Sie die optimale Politik in abhängigkeit von β.

d) Nehmen Sie für das Diskontierungsmodell an, dass $n \to \infty$. Ermitteln Sie die optimale politik für

$$\beta = \{0.90, 0.91, \ldots, 0.99\}.$$

2. Nehmen Sie die bewertete Markov-Kette $\{X(n)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit den Daten:

Zustand	Strategie	p_{ij}^k			q_i^k
1	1	1/2	1/4	1/4	3
	2	1/4	1/2	1/4	9
	3	1/2	1/2	0	8
2	1	1/2	0	1/2	3
	2	1/4	1/4	1/2	8
3	1	1/4	1/4	1/2	4

Bestimmen Sie eine optimale Politik für die beschränkte Anzahl von Stufen n im Problem mit dem Diskontierungsfaktor β (Mathematica), wobei $\beta = \{0.80, 0.81, \ldots, 0.90\}$. Bestimmen sie die optimale Politik für $n \to \infty$.

3. Gegeben sei die bewertete homogene Markov-Ketter $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ mit Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und Diskontierungsfactor β.

Bestimmen Sie die erwartete Erlöse $v_i(n), i \in E$, in expliziter Form mit Hilfe der z-Transformation.

4. Gegeben sei eine Markov-Kette mit kontinuierlicher Zeit, Zustandsraum $E = 1, 2, 3, 4, 5$ und Infinitesimalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & -15 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -10 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -10 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie das Übergangsratendiagramm graphisch dar. Bestimmen Sie die Zustandswahrscheinlichkeiten sowie die Grenzwahrscheinlichkeiten für diese Markov-Kette. Für die Lösung des Differentialgleichungssystems verwenden Sie die Mathematica-Befehle.