Markov-Ketten
WS 2016/17
7.Übungsblatt
Aufgaben für den 12.01.2017

1. Geben Sie zu folgender Intensitätsmatrix A der Markov-Kette $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ mit kontinuierlicher Zeit den Übergangsgraphen sowie die Kolmogorov-Vorwärts-Differentialgleichungen für die Zustandswahrscheinlichkeiten

$$\pi_i(t) = \mathbb{P}[X(t) = i],\ 0 \leq i \leq N,$$

inklusive der Anfangswerte $\pi_0(0) = 1, \pi_i(0) = 0$ für $i \neq 0$, an:

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & -\lambda & \lambda \\ 0 & \dots & & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Gegeben ist eine Markov-Kette $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ mit kontinuierlicher Zeit und mit dem Übergangsgraph (Abbildung 1), wobei $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 5, \beta_2 = 6$.

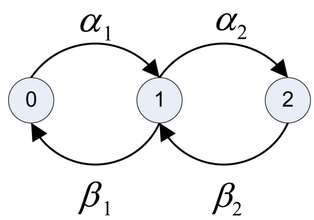

Abbildung 1: Übergangsgraph der Markov-Kette $\{X(t)\}_{t\geq 0}$

1) Bestimmen Sie das Zustandsraum E und infinitesimal Matrix A des Prozesses $\{X(t)\}_{t\geq 0}$. Ist der Markovprozess irreduzibel? Welche Zustände sind wesentlich und nicht wesentlich?

2) Bestimmen Sie mit der Lösung im Form des Matrixexponentialfunktion näherungsweise die Übergangsmatrix $P(t)$ an der Stelle $t = 0.01$. Hinweis: Zerlegen Sie die Matrixexponentialfunktion in eine Reihe bis zur Ordnung 3.

3) Bestimmen Sie die Grenzverteilung $\pi_j, j \in E$, des Prozesses. Bestimmen Sie die stationäre Verteilung $q_j, j \in E$, von $\{X(t)\}_{t\in T}$.

3. Gegeben ist ein Markov-Kette $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ mit dem Übergangsgraph (Abbildung 2), wobei $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 5$.

1) Bestimmen Sie das Zustandsraum E und infinitesimal Matrix A des Prozesses $\{X(t)\}_{t\geq 0}$. Ist der Markovprozess irreduzibel?

2) Bestimmen Sie mit der Lösung im Form des Matrixexponentialfunktion näherungsweise die Übergangsmatrix $P(t)$ an der Stelle $t = 0.01$. Hinweis: Zerlegen Sie die Matrixexponentialfunktion in eine Reihe bis zur Ordnung 3. Vergleichen Sie das Ergebniss mit dem Beispiel 2.

3) Bestimmen Sie die stationäre Verteilung $q_j, j \in E$, von $\{X(t)\}_{t\geq 0}$.

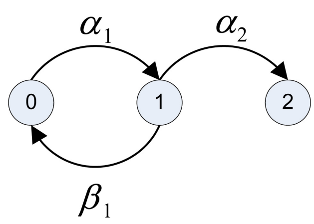

Abbildung 2: Übergangsgraph der Markov-Kette $\{X(t)\}_{t\geq 0}$

4. Wetter in Dortmund in kontinuierlicher Zeit. Zustandsraum $E = \{1, 2, 3\}$, wobei $x = 1$ – Regen, $x = 2$ – Bedeckt, $x = 3$ – Sonnig,

$$A = \begin{pmatrix} -0.6 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & -0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & -0.4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Zustandswahsrcheinlichkeiten $\pi_i(t)$ für verschiedene Anfangszustände sowie die Grenzverteilung $\pi_i, i \in E$. Bestimmen Sie mit der Lösung im Form des Matrixexponentialfunktion näherungsweise die Übergangsmatrix $P(t)$ an der Stelle $t = 2$.

5. Gegeben ist ein Markovprozess $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ mit dem bergangsgraph (Abbildung 3), wobei $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 4, \beta_1 = 5$.

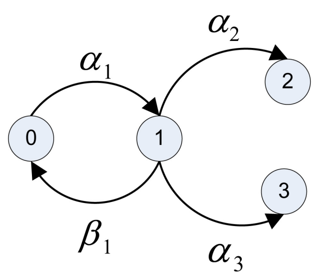

Abbildung 3: bergangsgraph der Markov-Kette $\{X(t)\}_{t\geq 0}$

1) Bestimmen Sie das Zustandsraum E und infinitesimal Matrix A des Prozesses $\{X(t)\}_{t\geq 0}$. Ist der Markovprozess irreduzibel?

2) Bestimmen Sie mit der Lösung im Form des Matrixexponentialfunktion näherungsweise die Übergangsmatrix $P(t)$ an der Stelle $t = 0.01$. Hinweis: Zerlegen Sie die Matrixexponentialfunktion in eine Reihe bis zur Ordnung 3.

3) Bestimmen Sie die stationäre Verteilung $q_j, j \in E$, von $\{X(t)\}_{t\geq 0}$.

6. Sei $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ eine bewertete Markov-Kette mit Zustandsraum $E = \{1, 2, 3\}$ und kontinuierlicher Zeit, Übergangsratenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

und den Erlöseraten $q_1 = 2$, $q_2 = 3$, $q_3 = 1$.

a) Bestimmen Sie den total zu erwartende Erlös $v_i(t), i \in E, n \in \mathbb{N}_0$ für $\mathbf{v}(0) = (0, 0, 0)'$.

b) Ermitteln Sie fr den Fall $n \to \infty$ den Gewinn des Prozesses $g_i, i \in E$ mit Hilfe von den Grenzwahrscheinlichkeiten π_i sowie mit der relativen Werten $v_i, i \in E$. Sind alle g_i gleich gross? Begründen Sie das Ergebniss.

c) Bestimmen Sie die Asymptote für die Funktion $v_i(n)$, wenn $n \to \infty$ und zeichnen Sie diese zusammen mit der echten Funktion $v_i(n)$.