§8 Kombinatorische Berechnungen

Wie wir wissen, läuft die Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Ereingisses $A \subseteq \Omega$ bei Laplace-Experimenten auf die Berechnung der Mächtigkeit der Mengen A und Ω hinaus. Leider besitzen diese Mengen A und Ω aber meistens sehr viele Elemente, sodass ein direktes (eventuell computerunterstütztes) Abzählen oft nicht möglich ist. Die bisher behandelten Methoden (Simulation und computerunterstütztes Abzählen) versagen aber auch dann, wenn man die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[A]$ eines Ereignisses $A \subseteq \Omega$ formelmäßig angeben möchte.

Wir werden nun Methoden kennen lernen, mit denen sich die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $A \subseteq \Omega$ unter Verwendung der in Kapitel 6 behandelten kombinatorischen Formeln berechnen lässt. Außerdem gehen wir kurz auf einige wichtige Anwendungen in der Teilchenphysik ein.

8.1 Einfache Beispiele

Die folgenden Beispiele zeichnen sich dadurch aus, dass sich sowohl die Menge Ω als auch die Menge A in einfacher Weise mit den in Kapitel 6 angegebenen kombinatorischen Mengen darstellen lässt.

8.1.1 Beispiel: k Würfel werden gleichzeitig geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei die maximale Augenzahl kleiner als m ist? (Vergleiche Beispiel 4.2.1 und Beispiel 7.1.1.)

▼

Lösung: Das Zufallsexperiment "gleichzeitiges Werfen von k Würfeln" besitzt den Ereignisraum

$$\Omega = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \mid x_1, x_2, \ldots, x_k \in \{1, 2, \ldots, 6\}\}$$

wobei die Liste $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \Omega$ der Realisierung "mit dem ersten Würfel wird die Augenzahl x_1, mit dem zweiten Würfel wird die Augenzahl x_2, …, mit dem k-ten Würfel wird die Augenzahl x_k gewürfelt" entspricht und alle Realisierungen $\omega \in \Omega$ gleich wahrscheinlich sind. Das Ereignis "die maximale Augenzahl ist kleiner als m" entspricht damit der Menge

$$A = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \Omega \mid x_1, x_2, \ldots, x_k \in \{1, 2, \ldots, m-1\}\}$$

Bei der Menge Ω handelt es sich um die Menge aller Variationen mit Wiederholung von k aus 6 Dingen. Bei der Menge A handelt es sich um die Menge aller Variationen mit Wiederholung von k aus $m-1$ Dingen. Damit gilt

$$\mathbb{P}[A] = (m-1)^k / 6^k$$

also speziell

```
k = 4; m = 5;
(m - 1)^k / 6^k // N
Clear[k, m]
```

```
0.197531
```

8.1.2 Beispiel: k Münzen werden gleichzeitig geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei weniger als a Adler auftreten? (Vergleiche Beispiel 4.2.3 und Beispiel 7.1.3.)

▼

Lösung: Das Zufallsexperiment "gleichzeitiges Werfen von k Münzen" besitzt den Ereignisraum

$$\Omega = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \mid x_1, x_2, \ldots, x_k \in \{0, 1\}\}$$

wobei die Liste $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \Omega$ der Realisierung "mit der i-ten Münze wird genau dann ein Adler geworfen, wenn $x_i = 1$ ist" entspricht und alle Realisierungen $\omega \in \Omega$ gleich wahrscheinlich sind. Das Ereignis "es treten dabei weniger als a Adler auf" entspricht damit der Menge

$$A = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \Omega \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_k < a\}$$

Bei der Menge Ω handelt es sich um die Menge aller Variationen mit Wiederholung von k aus 2 Dingen. Das Ereignis A lässt sich offenbar als disjunkte Vereinigung der Hilfsereignisse $A_0, A_1, \ldots, A_{a-1}$ mit

$$A_r = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \Omega \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_k = r\}$$

darstellen. Bei der Menge A_r (die Menge A_r beschreibt das Ereignis "es treten genau r Adler auf") handelt es sich um die Menge aller Kombinationen ohne Wiederholung von r aus k Dingen. Damit gilt

$$\mathbb{P}[A] = \sum_{r=0}^{a-1} \mathbb{P}[A_r] = \sum_{r=0}^{a-1} \binom{k}{r} / 2^k$$

also speziell

```
k = 15; a = 7;
Sum[Binomial[k, r], {r, 0, a - 1}] / 2^k // N
Clear[k, a]
```

```
0.303619
```

8.1.3 Beispiel: Aus einer Urne mit m Kugeln werden k Kugeln gezogen, wobei die gezogene Kugel stets wieder in die Urne zurückgelegt wird. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei mindestens eine Kugel mehrfach gezogen wird? (Vergleiche Beispiel 4.2.8 und Beispiel 7.1.7.)

▼

Lösung: Für das Ziehen mit Zurücklegen von k Kugeln aus einer Urne mit m Kugeln ist bekanntlich

$$\Omega = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \mid x_1, x_2, \ldots, x_k \in \{1, 2, \ldots, m\}\}$$

ein passender Ereignisraum, wobei die Liste $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \Omega$ der Realisierung "beim i-ten Zug wird die Kugel mit der Nummer x_i gezogen" entspricht und alle diese Realisierungen $\omega \in \Omega$ gleich wahrscheinlich sind. Das Ereignis "es wird dabei keine Kugel mehrfach gezogen" (bei diesem Ereignis handelt es sich um das Komplement des uns interessierenden Ereignisses "es wird dabei mindestens eine Kugel mehrfach gezogen") entspricht damit der Menge

$$A^c = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \mid x_1, x_2, \ldots, x_k \in \{1, 2, \ldots, m\} \text{ paarweise verschieden}\}$$

Bei der Menge Ω handelt es sich um die Menge aller Variationen mit Wiederholung von k aus m Dingen. Die Menge A^c entspricht der Menge aller Variationen ohne Wiederholung von k aus m Dingen. Damit gilt

$$\mathbb{P}[A] = 1 - \mathbb{P}[A^c] = 1 - \frac{m!}{m^k\,(m-k)!}$$

also speziell

```
k = 5; m = 10;
1 - m!/(m^k (m - k)!) // N
Clear[k, m]
```

```
0.6976
```

8.1.4 Beispiel: Einer Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln werden gleichzeitig k Kugeln entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei mindestens eine rote Kugel gezogen wird? (Vergleiche Beispiel 4.2.11 und Beispiel 7.1.9.)

▼

Lösung: Wir nummerieren die $m = r + s$ Kugeln in der Weise, dass die r roten Kugeln die Nummern 1, 2, …, r und die s schwarzen Kugeln die Nummern $r + 1$, $r + 2$, …, m erhalten. Das gleichzeitige Ziehen von k Kugeln aus dieser Urne lässt sich damit durch den Ereignisraum

$$\Omega = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \mid x_i \in \{0, 1\} \text{ und } x_1 + x_2 + \ldots + x_m = k\}$$

beschreiben, wobei die Liste $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \in \Omega$ der Realisierung "die i-te Kugel wird genau dann gezogen, wenn $x_i = 1$ ist" entspricht. Alle Realisierungen $\omega \in \Omega$ sind offenbar gleich wahrscheinlich. Das Ereignis "es wird dabei keine rote Kugel gezogen" (bei diesem Ereignis handelt es sich um das Komplement des uns interessierenden Ereignisses "es wird dabei mindestens eine rote Kugel gezogen") entspricht damit der Menge

$$A^c = \{\{0, 0, \ldots, 0, x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_m\} \mid x_i \in \{0, 1\} \text{ und } x_{r+1} + x_{r+2} + \ldots + x_m = k\}$$

Bei der Menge Ω handelt es sich um die Menge aller Kombinationen ohne Wiederholung von k aus m Dingen. Die Menge A^c entspricht (abgesehen von den vorne angefügten Nullen) der Menge aller Kombinationen ohne Wiederholung von k aus s Dingen. Damit gilt

$$\mathbb{P}[A] = 1 - \mathbb{P}[A^c] = 1 - \binom{s}{k} / \binom{r+s}{k}$$

also speziell

```
r = 5; s = 15; k = 7;
1 - Binomial[s, k]/Binomial[r + s, k] // N
Clear[r, s, k]
```

```
0.916989
```

8.1.5 Beispiel: Eine Lotterie umfasst m Lose, von denen g gewinnen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für (mindestens) einen Gewinn, wenn man k Lose kauft? (Vergleiche Beispiel 4.2.13 und Beispiel 7.1.10.)

▼

Lösung: Wir nummerieren die m Lose mit den Zahlen 1, 2, …, m, wobei wir den g Gewinnlosen die Nummern 1, 2, …, g zuordnen. Der zufällige Kauf von k Losen lässt sich damit durch den Ereignisraum

$$\Omega = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \mid x_i \in \{0, 1\} \text{ und } x_1 + x_2 + \ldots + x_m = k\}$$

beschreiben, wobei die Liste $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \in \Omega$ der Realisierung "das i-te Los wird genau dann gekauft, wenn $x_i = 1$ ist" entspricht und alle diese $\omega \in \Omega$ gleich wahrscheinlich sind. Das Ereignis "unter den k Losen befindet sich kein Gewinnlos" (bei diesem Ereignis handelt es sich um das Komplement des uns interessierenden Ereignisses "unter den k Losen befindet sich mindestens ein Gewinnlos") entspricht damit der Menge

$$A^c = \{\{0, 0, \ldots, 0, x_{g+1}, x_{g+2}, \ldots, x_m\} \mid x_i \in \{0, 1\} \text{ und } x_{g+1} + x_{g+2} + \ldots + x_m = k\}$$

Bei der Menge Ω handelt es sich um die Menge aller Kombinationen ohne Wiederholung von k aus m Dingen. Bei der Menge A^c handelt es sich (abgesehen von den vorne angefügten Nullen) um die Menge aller Kombinationen ohne Wiederholung von k aus $m - g$ Dingen. Damit gilt

$$\mathbb{P}[A] = 1 - \mathbb{P}[A^c] = 1 - \binom{m-g}{k} / \binom{m}{k}$$

also speziell

```
m = 50; k = 4; g = 5;
1 - Binomial[m - g, k]/Binomial[m, k] // N
Clear[m, k, g]
```

```
0.35304
```

8.1.6 Beispiel: Ein Teilchen bewegt sich mit der Geschwindigkeit 1 auf der Zahlengerade. Kommt es in einen Punkt mit ganzzahliger Abszisse, so entscheidet sich unser Teilchen (unabhängig von seinem bisherigen Weg) mit gleicher Wahrscheinlichkeit für ein Weiterwandern nach rechts bzw links. Das Teilchen beginnt mit seiner Wanderung im Ursprung. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich das Teilchen zum Zeitpunkt k rechts vom Punkt r befindet? (Vergleiche Beispiel 4.2.16 und Beispiel 7.1.13.)

▼

Lösung: Wir kommen wieder überein, ein Weiterwandern unseres Teilchens nach rechts mit +1 und nach links mit −1 zu bezeichnen. Die Menge der möglichen Wanderungen lässt sich dann durch die Menge

$$\Omega = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \mid x_i \in \{+1, -1\}\}$$

beschreiben, wobei die Liste $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \Omega$ der Realisierung "zum Zeitpunkt $i-1$ entscheidet sich das Teilchen für ein Weiterwandern nach rechts bzw links je nachdem, ob x_i gleich +1 bzw −1 ist" entspricht und alle diese Realsierungen $\omega \in \Omega$ gleich wahrscheinlich sind. Das uns interessierende Ereignis "zum Zeitpunkt k befindet sich das Teilchen rechts vom Punkt r" entspricht somit der Menge

$$A = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \Omega \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_k > r\}$$

Bei der Menge Ω handelt es sich um die Menge aller Variationen mit Wiederholung von k aus 2 Dingen. Die Menge A lässt sich als disjunkte Vereinigung $A = A_{r+1} \cup A_{r+2} \cup \ldots \cup A_k$ der Mengen

$$A_s = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \mid x_i \in \{+1, -1\} \text{ und } x_1 + x_2 + \ldots + x_k = s\}$$

darstellen, wobei die Menge A_s das Ereignis "das Teilchen befindet sich zum Zeitpunkt k im Punkt s" beschreibt. Ist $k-s$ keine gerade Zahl, so ist die Menge A_s natürlich leer; ist hingegen $k-s$ eine gerade Zahl, so lässt sich die Menge A_s offenbar bijektiv auf die Menge

$$A_s \approx \{\{y_1, y_2, \ldots, y_k\} \mid y_i \in \{0, 1\} \text{ und } y_1 + y_2 + \ldots + y_k = \frac{k-s}{2}\}$$

aller Kombinationen ohne Wiederholung von $(k-s)/2$ aus k Dingen abbilden. Damit gilt wegen Satz 2.2.2 (mit $\lfloor a \rfloor$ bezeichnen wir dabei das Größte Ganze der Zahl a)

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A_{r+1}] + \mathbb{P}[A_{r+2}] + \ldots + \mathbb{P}[A_k] = \frac{1}{2^k} [\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \ldots + \binom{k}{\lfloor (k-r-1)/2 \rfloor}] = \frac{1}{2^k} \sum_{s=0}^{\lfloor (k-r-1)/2 \rfloor} \binom{k}{s}$$

also speziell

```
k = 15; r = 2;
Sum[Binomial[k, s], {s, 0, Floor[(k - r - 1)/2]}]/2^k // N
Clear[k, s]
```

```
0.303619
```

8.1.7 Beispiel: Einem Karton mit n Glühbirnen werden bei einer Qualitätskontrolle zufällig k Glühbirnen entnommen und geprüft. Ist mindestens eine dieser k Glühbirnen defekt, so wird der ganze Karton zurückgehalten. Wie groß muss k gewählt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % sicher gestellt ist, dass ein Karton mit m defekten Glühbirnen diese Qualitätskontrolle nicht passiert?

▼

Lösung: Wir nummerieren die n Glühbirnen unseres Kartons mit den Zahlen $1, 2, \ldots, n$, wobei wir den defekten Glühbirnen die Zahlen $1, 2, \ldots, m$ zuteilen. Unser Zufallsexperiment besteht im zufälligen Auswählen von k Glühbirnen aus diesem Karton, wofür bekanntlich

$$\Omega = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{0, 1\} \text{ und } x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k\}$$

ein passender Ereignisraum ist. Die Liste $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in \Omega$ entspricht dabei der Realisierung "die i-te Glühbirne wird genau dann ausgewählt, wenn $x_i = 1$ ist". Alle $\omega \in \Omega$ sind wieder gleich wahrscheinlich. Das Ereignis "der Karton mit den m defekten Glühbirnen passiert die Qualitätskontrolle" (bei diesem Ereignis handelt es sich um das Komplement des uns eigentlich interessierenden Ereignisses "der Karton passiert die Qualitätskontrolle nicht") entspricht damit der Menge

$$A^c = \{\{0, 0, \ldots, 0, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n\} \mid x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n \in \{0, 1\} \text{ und } x_{m+1} + x_{m+2} + \ldots + x_n = k\}$$

Bei der Menge Ω handelt es sich um die Menge aller Kombinationen ohne Wiederholung von k aus n Dingen. Die Menge A^c entspricht (abgesehen von den vorne angehängten Nullen) der Menge aller Kombinationen ohne Wiederholung von k aus $n - m$ Dingen. Damit gilt

$$\mathbb{P}[A] = 1 - \mathbb{P}[A^c] = 1 - \binom{n-m}{k} / \binom{n}{k}$$

Durch Experimentieren ergibt sich etwa für $n = 1000$ und $m = 20$, dass $k = 138$ der kleinste Wert ist, für den die Beziehung $\mathbb{P}[A] \geq 0.95$ gilt:

```
n = 1000; m = 20; k = 138;
1 - Binomial[n - m, k] / Binomial[n, k] // N
Clear[n, m, k]
```

```
0.950255
```

8.1.8 Beispiel: In einer Urne befinden sich n Lose, welche mit den Zahlen $1, 2, \ldots, n$ nummeriert sind. Jemand zieht aus dieser Urne ohne Zurücklegen k Lose. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die kleinste dabei gezogene Zahl gleich r und die größte dabei gezogene Zahl gleich s ist?

▼

Lösung: Für unser Zufallsexperiment "Ziehen ohne Zurücklegen von k Losen aus einer Urne mit n Losen" ist die Menge

$$\Omega = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{0, 1\} \text{ und } x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k\}$$

ein passender Ereignisraum, wobei die Liste $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in \Omega$ der Realisierung "das Los mit den Nummer i wird genau dann gezogen, wenn $x_i = 1$ ist" entspricht und alle $\omega \in \Omega$ gleich wahrscheinlich sind. Das Ereignis "die kleinste dabei gezogene Zahl ist r und die größte dabei gezogene Zahl ist s" entspricht damit der Menge

$$A = \{\{0, \underbrace{\ldots}_{r-1 \text{ mal}}, 0, 1, x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_{s-1}, 1, 0, \underbrace{\ldots}_{n-s \text{ mal}}, 0\} \mid x_i \in \{0, 1\} \text{ und } x_{r+1} + x_{r+2} + \ldots + x_{s-1} = k - 2\}$$

Bei der Menge Ω handelt es sich um die Menge aller Kombinationen ohne Wiederholung von k aus n Dingen. Die Menge A entspricht (abgesehen von den vorne und hinten angehängten Zahlen 0 und 1) der Menge aller Kombinationen ohne Wiederholung von $k - 2$ aus $s - 1 - r$ Dingen. Damit gilt

$$\mathbb{P}[A] = \binom{s-1-r}{k-2} / \binom{n}{k}$$

also speziell

```
n = 15; k = 8; r = 4; s = 13;
Binomial[s − 1 − r, k − 2] / Binomial[n, k] // N
Clear[n, k, r, s]
```

```
0.0043512
```

8.1.9 Beispiel: Der berühmte Mathematiker S. BANACH war ein leidenschaftlicher Raucher. Damit er stets Zündhölzer bei sich hatte, trug er in zwei Taschen je eine Schachtel Zündhölzer, denen er bei Bedarf zufällig ein Zündholz entnahm. Einmal steckte er zwei volle Schachteln mit je n Zündhölzern in seine Taschen. Man berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in dem Moment, in dem er zum ersten Mal eine der beiden Schachteln leer fand, in der anderen Schachtel noch genau k Zündhölzer waren.

▼

Lösung: Um entscheiden zu können, ob in dem Moment, in dem BANACH zum ersten Mal eine der beiden Schachteln leer findet, sich in der anderen Schachtel noch genau k Zündhölzer befinden, müssen wir $(n-k)+(n+1)$ Züge von BANACH beobachten. Dafür ist die Menge

$$\Omega = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_{2n-k+1}\} \mid x_i \in \{0, 1\}\}$$

ein geeigneter Ereignisraum, wobei die Liste $\{x_1, x_2, \ldots, x_{2n-k+1}\} \in \Omega$ der Realisierung "BANACH wählt beim i-ten Zug die linke bzw die rechte Tasche, je nachdem, ob $x_i = 0$ bzw $x_i = 1$ ist" entspricht und alle diese $\omega \in \Omega$ voraussetzungsgemäß gleich wahrscheinlich sind. Das uns interessierende Ereignis "in dem Moment, in dem BANACH zum ersten Mal eine der beiden Schachteln leer findet, befinden sich in der anderen Schachtel noch genau k Zündhölzer" entspricht damit der Menge

$$A = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_{2n-k}, 1\} \mid x_i \in \{0, 1\} \text{ und } x_1 + x_2 + \ldots + x_{2n-k} = n\} \cup$$
$$\cup \{\{x_1, x_2, \ldots, x_{2n-k}, 0\} \mid x_i \in \{0, 1\} \text{ und } x_1 + x_2 + \ldots + x_{2n-k} = n-k\}$$

Bei der Menge Ω handelt es sich um die Menge aller Variationen mit Wiederholung von $2n-k+1$ aus 2 Dingen. Bei der Menge A handelt es sich (abgesehen von den angehängten Zahlen 0 bzw 1) um die Vereinigung der Menge aller Kombinationen ohne Wiederholung von n aus $2n-k$ Dingen und der Menge aller Kombinationen ohne Wiederholung von $n-k$ aus $2n-k$ Dingen . Damit gilt

$$\mathbb{P}[A] = \left(\binom{2n-k}{n} + \binom{2n-k}{n-k}\right) / 2^{2n-k+1} = \binom{2n-k}{n} / 2^{2n-k}$$

also speziell

```
n = 20; k = 5;
Binomial[2 n − k, n] / 2^(2 n−k) // N
Clear[n, k]
```

```
0.0945276
```

8.1.10 Beispiel: k Kugeln werden auf n Urnen verteilt, wobei jede Kugel mit der gleichen Wahrscheinlichkeit in jede Urne gelangen kann. Wir groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei in eine bestimmte Urne (etwa in die n-te Urne) genau m Kugeln gelangen?

▼

Lösung: Für unser Zufallsexperiment ist

$$\Omega = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \mid x_i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$$

ein geeigneter Ereignisraum, wobei die Liste $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \Omega$ der Realisierung "die erste Kugel gelangt in die x_1-te Urne, die zweite Kugel gelangt in die x_2-te Urne, …, die k-te Kugel gelangt in die x_k-te Urne" entspricht und alle diese $\omega \in \Omega$ gleich wahrscheinlich sind. Das uns interessierende Ereignis "in die n-te Urne gelangen genau m Kugeln" entspricht damit der Menge

$$A = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \Omega \mid \text{genau } m \text{ der Werte } x_1, x_2, \ldots, x_k \text{ sind gleich } n\}$$

Bei der Menge Ω handelt es sich um die Menge aller Variationen mit Wiederholung von k aus n Dingen. Die Menge A lässt sich als disjunkte Vereinigung der Mengen

$$A_{i_1,i_2,\ldots,i_m} = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \Omega \mid \text{genau die } m \text{ Werte } x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m} \text{ sind gleich } n\}$$

mit $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_m \le k$ darstellen (wobei diese Menge das Ereignis "die i_1-te, die i_2-te, … und die i_m-te Kugel gelangen in die n-te Urne, die restlichen Kugeln gelangen in andere Urnen" beschreibt). Jede dieser Mengen $A_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$ ist aber offenbar bijektiv zur Menge

$$A_{i_1,i_2,\ldots,i_m} \approx \{\{y_1, y_2, \ldots, y_{k-m}\} \mid y_i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}\}$$

aller Variationen mit Wiederholung von $k-m$ aus $n-1$ Dingen. Da außerdem die Indexmenge

$$\{\{i_1, i_2, \ldots, i_m\} \mid 1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_m \le k\}$$

der alternativen Menge aller Kombinationen ohne Wiederholung von m aus k Dingen entspricht, gilt

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}\Big[\bigcup_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_m\le k} A_{i_1,i_2,\ldots,i_m}\Big] = \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_m\le k} \mathbb{P}[A_{i_1,i_2,\ldots,i_m}] = \binom{k}{m} \frac{(n-1)^{k-m}}{n^k}$$

also speziell

```
k = 15; n = 10; m = 4;
Binomial[k, m] (n - 1)^(k-m) / n^k // N
Clear[k, n, m]
```

```
0.0428351
```

8.2 Beispiele zur Ein-Ausschaltregel

Die folgenden Beispiele zeichnen sich dadurch aus, dass sich das Ereignis A durch geeignet gewählte Hilfsereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ in der Form $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ darstellen lässt, wobei sich die Wahrscheinlichkeiten dieser Hilfsereignisse und ihrer Durchschnitte leicht berechnen lassen. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[A]$ ergibt sich dann unter Verwendung der Ein-Ausschaltregel

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A_i] - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \mathbb{P}[A_i \cap A_j] + - \ldots + (-1)^{n-1}\, \mathbb{P}[A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n]$$

8.2.1 Beispiel: m Ehepaare besuchen eine Party. Für ein Tanzspiel werden die Tanzpartner zufällig ausgelost, wodurch jeder Herr jede Dame mit der gleichen Wahrscheinlichkeit zugeteilt bekommt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass kein Herr mit seiner eigenen Frau tanzt? (Vergleiche Beispiel 4.2.15 und Beispiel 7.1.12.)

▼

Lösung: Wir nummerieren die m Ehepaare mit den Zahlen $1, 2, \ldots, m$. Die Menge der möglichen Kombinationen von Tanzpartnern lässt sich dann durch die Menge

$$\Omega = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \mid x_i \in \{1, 2, \ldots, m\} \text{ und } x_1, x_2, \ldots, x_m \text{ sind paarweise verschieden}\}$$

beschreiben, wobei die Liste $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \in \Omega$ der Realisierung "der erste Herr tanzt mit der x_1-ten Dame, der zweite Herr tanzt mit der x_2-ten Dame, …, der m-te Herr tanzt mit der x_m-ten Dame" entspricht und alle diese

Realisierungen $\omega \in \Omega$ voraussetzungsgemäß mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten. Bei der Menge Ω handelt es sich offenbar um die Menge aller Permutationen ohne Wiederholung von m Dingen. Das uns interessierende Ereignis "kein Herr tanzt mit seiner eigenen Frau" entspricht damit der Menge

$$A = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \in \Omega \mid x_1 \neq 1, x_2 \neq 2, \ldots, x_m \neq m\}$$

Für alle $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ bezeichnen wir mit

$$A_i = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \in \Omega \mid x_i = i\}$$

das Hilfsereignis "zumindest der i-te Herr tanzt mit seiner eigenen Frau". Für alle $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq m$ lässt sich aber der Durchschnitt

$$A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_r} = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \in \Omega \mid x_{i_1} = i_1, x_{i_2} = i_2, \ldots, x_{i_r} = i_r\} \approx$$

$$\approx \{\{y_1, y_2, \ldots, y_{m-r}\} \mid y_i \in \{1, 2, \ldots, m-r\} \text{ und } y_1, y_2, \ldots, y_{m-r} \text{ sind paarweise verschieden}\}$$

der r Ereignisse $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_r}$ offensichtlich (etwa indem man jene r Ehepaare $i_1, i_2, \ldots, i_r$, die sicher miteinander tanzen, von vorne herein beim Tanzspiel nicht berücksichtigt) bijektiv auf die Menge aller Permutationen ohne Wiederholung von $m - r$ Dingen abbilden, was

$$\mathbb{P}[A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_r}] = \frac{(m-r)!}{m!}$$

zur Folge hat. Unter Verwendung der Ein-Ausschaltregel ergibt sich damit

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A_1{}^c \cap A_2{}^c \cap \ldots \cap A_m{}^c] = \mathbb{P}[(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m)^c] = 1 - \mathbb{P}[A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m] =$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}[A_i] + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{m} \mathbb{P}[A_i \cap A_j] - + \ldots + (-1)^m \, \mathbb{P}[A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m] =$$

$$= 1 - \binom{m}{1} \frac{(m-1)!}{m!} + \binom{m}{2} \frac{(m-2)!}{m!} - + \ldots + (-1)^m \binom{m}{m} \frac{(m-m)!}{m!} = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \, \frac{1}{i!}$$

also speziell

```
m = 8;
Sum[(-1)^i / i!, {i, 0, m}] // N
Clear[m]
```

```
0.367882
```

8.2.2 Beispiel: Auf m anfangs leere Urnen werden k Kugeln verteilt, wobei jede Kugel mit der gleichen Wahrscheinlichkeit in jede Urne gelangen kann. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei keine Urne leer bleibt? (Vergleiche Beispiel 4.2.10 und Beispiel 7.1.8.)

▼

Lösung: Für dieses Zufallsexperiment ist bekanntlich

$$\Omega = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \mid x_i \in \{1, 2, \ldots, m\}\}$$

ein passender Ereignisraum, wobei die Liste $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \Omega$ der Realisierung "die erste Kugel gelangt in die x_1-te Urne, die zweite Kugel gelangt in die x_2-te Urne, …, die k-te Kugel gelangt in die x_k-te Urne" entspricht und alle diese Realisierungen $\omega \in \Omega$ voraussetzungsgemäß mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten. Bei der Menge Ω handelt es sich offenbar um die Menge aller Variationen mit Wiederholung von k aus m Dingen. Das uns interessierende Ereignis "keine Urne bleibt leer" entspricht damit der Menge

$$A = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \Omega \mid \text{die Menge } \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \text{ besitzt die Mächtigkeit } m\}$$

Für alle $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ bezeichnen wir mit

$$A_i = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \Omega \mid x_1 \neq i \text{ und } x_2 \neq i \text{ und} \ldots \text{und } x_k \neq i\}$$

das Hilfsereignis "die i-te Urne bleibt leer". Für alle $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq m$ lässt sich aber der Durchschnitt

$$A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_r} = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \mid x_i \in \{1, 2, \ldots, m\} - \{i_1, i_2, \ldots, i_r\}\} \approx$$

$$\approx \{\{y_1, y_2, \ldots, y_k\} \mid y_i \in \{1, 2, \ldots, m - r\}\}$$

offensichtlich (etwa indem man jene r Urnen $i_1, i_2, \ldots, i_r$, die jedenfalls leer bleiben, von vorne herein bei der Verteilung der Kugeln nicht berücksichtigt) bijektiv auf die Menge aller Variationen mit Wiederholung von k aus $m - r$ Dingen abbilden, was

$$\mathbb{P}[A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_r}] = \frac{(m-r)^k}{m^k} = (1 - \frac{r}{m})^k$$

zur Folge hat. Unter Verwendung der Ein-Ausschaltregel ergibt sich damit

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A_1{}^c \cap A_2{}^c \cap \ldots \cap A_m{}^c] = \mathbb{P}[(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m)^c] = 1 - \mathbb{P}[A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m] =$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}[A_i] + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{m} \mathbb{P}[A_i \cap A_j] - + \ldots + (-1)^m \, \mathbb{P}[A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m] =$$

$$= 1 - \binom{m}{1}(1 - \frac{1}{m})^k + \binom{m}{2}(1 - \frac{2}{m})^k - + \ldots + (-1)^m \binom{m}{m}(1 - \frac{m}{m})^k = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i}(1 - \frac{i}{m})^k$$

also speziell

```
m = 5; k = 8;
Sum[(-1)^i Binomial[m, i] (1 - i/m)^k, {i, 0, m}] // N
Clear[m, k]
```

```
0.32256
```

8.3 Weitere Beispiele

Bei den folgenden Beispielen werden verschiedene Tricks gezeigt, mit denen sich die Anzahl der Elemente des uns interessierenden Ereignisses A ermitteln lässt. Einer dieser Tricks besteht darin, die Menge A als kartesisches Produkt $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_s$ von Mengen, deren Mächtigkeiten bekannt sind, darzustellen. Ein anderer Trick ist als Reflexionsprinzip bekannt. Dabei geht es darum, die Realisierungen $\omega \in \Omega$ in geeigneter Weise als Streckenzüge in der Ebene zu veranschaulichen und jene Streckenzüge, welche dem interessierenden Ereignis A entsprechen, durch Spiegelung an einer geeigneten Geraden in eine Menge von Streckenzügen überzuführen, deren Mächtigkeit leicht berechnet werden kann.

8.3.1 Beispiel: Eine Gesellschaft aus 12 Damen und 6 Herren wird in drei Gruppen zu je sechs Personen eingeteilt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei in jede dieser Gruppen genau zwei Herren gelangen? (Vergleiche Beispiel 4.2.14 und Beispiel 7.1.11.)

▼

Lösung: Wir nummerieren die 18 zu vergebenden Plätze mit den Zahlen 1, 2, …, 18, wobei der ersten Gruppe die Plätze 1, 2, …, 6, der zweiten Gruppe die Plätze 7, 8, …, 12 und der dritten Gruppe die restlichen Plätze

13, 14, …, 18 zugeordnet werden. Unser Zufallsexperiment besteht im zufälligen Aufteilen der 6 Herren auf diese 18 Plätze, wofür

$$\Omega = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_6\} \mid x_1, x_2, \ldots, x_6 \in \{1, 2, \ldots, 18\} \text{ und } x_1 < x_2 < \ldots < x_6\}$$

ein passender Ereignisraum ist. Die Liste $\{x_1, x_2, \ldots, x_6\} \in \Omega$ entspricht dabei der Realisierung "den 6 Herren werden die Plätze $x_1, x_2, \ldots, x_6$ zugewiesen". Alle diese $\omega \in \Omega$ sind wieder gleich wahrscheinlich. Das Ereignis "in jeder dieser drei Gruppen befinden sich genau zwei Herren" entspricht damit der Menge

$$A = \{\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\} \in \Omega \mid 1 \leq x_1, x_2 \leq 6 \wedge 7 \leq x_3, x_4 \leq 12 \wedge 13 \leq x_5, x_6 \leq 18\}$$

Bei der Menge Ω handelt es sich um die alternative Menge aller Kombinationen ohne Wiederholung von 6 aus 18 Dingen. Die Menge A entspricht dem dreifachen kartesischen Produkt (wir verwenden verschiedene Farben statt Klammern) der alternativen Menge aller Kombinationen ohne Wiederholung von 2 aus 6 Dingen. Damit gilt

$$\mathbb{P}[A] = \binom{6}{2}^3 / \binom{18}{6}$$

also

```
Binomial[6, 2]^3 / Binomial[18, 6] // N
```

```
0.181803
```

8.3.2 Beispiel: Aus einer Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln werden ohne Zurücklegen alle $r+s$ Kugeln gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim k-ten Zug das erste Mal eine rote Kugel gezogen wird?

▼

Lösung: Wir nummerieren die Kugeln der Urne mit den Zahlen $1, 2, \ldots, r+s$, wobei den r roten Kugeln die Nummern $1, 2, \ldots, r$ und den s schwarzen Kugeln die Zahlen $r+1, r+2, \ldots, r+s$ zugewiesen werden. Für unser Zufallsexperiment ist damit

$$\Omega = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_{r+s}\} \mid x_1, x_2, \ldots, x_{r+s} \in \{1, 2, \ldots, r+s\} \text{ paarweise verschieden}\}$$

ein passender Ereignisraum, wobei die Liste $\{x_1, x_2, \ldots, x_{r+s}\} \in \Omega$ der Realisierung "beim i-ten Zug wird die Kugel mit der Nummer x_i gezogen" entspricht und alle $\omega \in \Omega$ gleich wahrscheinlich sind. Das Ereignis "beim k-ten Zug wird das erste Mal eine rote Kugel gezogen" entspricht damit der Menge

$$\begin{aligned} A = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{r+s}\} \mid \\ & x_1, x_2, \ldots, x_{k-1} \in \{r+1, r+2, \ldots, r+s\} \text{ paarweise verschieden} \\ & x_k \in \{1, 2, \ldots, r\} \\ & x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{r+s} \in \{1, 2, \ldots, r+s\} \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \text{ paarweise verschieden}\} \end{aligned}$$

Bei der Menge Ω handelt es sich um die Menge aller Permutationen ohne Wiederholung von $r+s$ Dingen. Die Mächtigkeit der Menge A erhält man leicht mit folgender Überlegung: Die Menge

$$A_1 = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\} \mid x_1, x_2, \ldots, x_{k-1} \in \{r+1, r+2, \ldots, r+s\} \text{ paarweise verschieden}\}$$

ist offensichtlich bijektiv zur Menge aller Variationen ohne Wiederholung von $k-1$ aus s Dingen; die Menge

$$A_2 = \{x_k \mid x_k \in \{1, 2, \ldots, r\}\}$$

besitzt die Mächtigkeit r; die Menge

$$\begin{aligned} A_3 = \{\{x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{r+s}\} \mid \\ & x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{r+s} \in \{1, 2, \ldots, r+s\} \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \text{ paarweise verschieden}\} \end{aligned}$$

ist bijektiv zur Menge aller Permutationen ohne Wiederholung von $r+s-k$ Dingen. Da die Mächtigkeit der Menge A gleich dem Produkt der Mächtigkeiten der Menge A_1, A_2, A_3 ist, gilt

$$\mathbb{P}[A] = \frac{1}{(r+s)!} \frac{s!}{(s-k+1)!} r(r+s-k)!$$

also speziell

```
r = 10; s = 15; k = 3;
(1/(r + s)!)*(s!/(s - k + 1)!)*r (r + s - k)! // N
Clear[r, s, k]
```

```
0.152174
```

8.3.3 Beispiel: Aus einer Urne mit r roten, s schwarzen und b blauen Kugeln werden ohne Zurücklegen $k = r_1 + s_1 + b_1$ Kugeln gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei r_1 rote, s_1 schwarze und b_1 blaue Kugeln gezogen werden?

▼

Lösung: Wir nummerieren die Kugeln der Urne mit den Zahlen 1, 2, …, $r+s+b$, wobei den r roten Kugeln die Zahlen 1, 2, …, r, den s schwarzen Kugeln die Zahlen $r+1$, $r+2$, …, $r+s$ und den b blauen Kugeln die Zahlen $r+s+1$, $r+s+2$, …, $r+s+b$ zugewiesen werden. Für unser Zufallsexperiment ist damit

$$\Omega = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_{r+s+b}\} \mid x_1, x_2, \ldots, x_{r+s+b} \in \{0, 1\} \text{ und } x_1 + x_2 + \ldots + x_{r+s+b} = k\}$$

ein passender Ereignisraum, wobei die Liste $\{x_1, x_2, \ldots, x_{r+s+b}\} \in \Omega$ der Realisierung "die i-te Kugel wird genau dann gezogen, wenn $x_i = 1$ ist" entspricht und alle diese $\omega \in \Omega$ wieder gleich wahrscheinlich sind. Das Ereignis "es werden dabei r_1 rote, s_1 schwarze und b_1 blaue Kugeln gezogen" entspricht damit der Menge

$$\begin{aligned} A = \{\{&x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_{r+s}, x_{r+s+1}, x_{r+s+2}, \ldots, x_{r+s+b}\} \mid \\ &x_1, x_2, \ldots, x_r \in \{0, 1\} \text{ mit } x_1 + x_2 + \ldots + x_r = r_1 \\ &x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_{r+s} \in \{0, 1\} \text{ mit } x_{r+1} + x_{r+2} + \ldots, x_{r+s} = s_1 \\ &x_{r+s+1}, x_{r+s+2}, \ldots, x_{r+s+b} \in \{0, 1\} \text{ mit } x_{r+s+1} + x_{r+s+2} + \ldots + x_{r+s+b} = b_1\} \end{aligned}$$

Bei der Menge Ω handelt es sich um die Menge aller Kombinationen ohne Wiederholung von $k = r_1 + s_1 + b_1$ aus $r+s+b$ Dingen. Die Mächtigkeit der Menge A erhält man leicht mit folgender Überlegung: Bei der Menge

$$A_1 = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_r\} \mid x_1, x_2, \ldots, x_r \in \{0, 1\} \text{ mit } x_1 + x_2 + \ldots + x_r = r_1\}$$

handelt es sich um die Menge aller Kombinationen ohne Wiederholung von r_1 aus r Dingen; bei der Menge

$$A_2 = \{\{x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_{r+s}\} \mid x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_{r+s} \in \{0, 1\} \text{ mit } x_{r+1} + x_{r+2} + \ldots, x_{r+s} = s_1\}$$

handelt es sich um die Menge aller Kombinationen ohne Wiederholung von s_1 aus s Dingen; bei der Menge

$$\begin{aligned} A_3 = \{\{&x_{r+s+1}, x_{r+s+2}, \ldots, x_{r+s+b}\} \mid \\ &x_{r+s+1}, x_{r+s+2}, \ldots, x_{r+s+b} \in \{0, 1\} \text{ und } x_{r+s+1} + x_{r+s+2} + \ldots + x_{r+s+b} = b_1\} \end{aligned}$$

handelt es sich um die Menge aller Kombinationen ohne Wiederholung von b_1 aus b Dingen. Da die Mächtigkeit der Menge A gleich dem Produkt der Mächtigkeiten der Menge A_1, A_2, A_3 ist, gilt

$$\mathbb{P}[A] = \binom{r}{r_1}\binom{s}{s_1}\binom{b}{b_1} / \binom{r+s+b}{k}$$

also speziell

```
r = 10; s = 15; b = 8; r1 = 4; s1 = 5; b1 = 3; n = r + s + b; k = r1 + s1 + b1;
Binomial[r, r1] Binomial[s, s1] Binomial[b, b1] / Binomial[n, k] // N
Clear[r, s, b, r1, s1, b1, n, k]
```

```
0.0995309
```

8.3.4 Beispiel: Zwei gleich gute Spieler spielen bis zum Gesamtsieg. Dazu muss der erste Spieler noch a und der zweite Spieler noch b Runden gewinnen. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der erste Spieler gewinnt? (Vergleiche Beispiel 4.2.4 und Beispiel 7.1.4.)

▼

Lösung: Wir kommen überein, einen Sieg des ersten Spielers mit 1 und einen Sieg des zweiten Spielers mit 0 zu bezeichnen. Eine Entscheidung darüber, welcher Spieler den Gesamtsieg davon trägt, ist nach höchstens $k = a + b - 1$ Runden entschieden. Unser Zufallsexperiment besteht daher in der Beobachtung des Spielverlaufes über k Runden. Dieses Zufallsexperiment besitzt den Ereignisraum

$$\Omega = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \mid x_1, x_2, \ldots, x_k \in \{0, 1\}\}$$

wobei die Liste $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \Omega$ der Realisierung "der erste Spieler gewinnt die i-te Runde genau dann, wenn $x_i = 1$ ist" entspricht. Da die beiden Spieler voraussetzungsgemäß gleich gut spielen, sind alle Realisierungen $\omega \in \Omega$ gleich wahrscheinlich. Bei der Menge Ω handelt es sich um die Menge aller Variationen mit Wiederholung von k aus 2 Dingen. Das Ereignis "der erste Spieler erzielt den Gesamtsieg" entspricht damit der Menge

$$A = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \Omega \mid \sum_{i=1}^{k} x_i \geq a\}$$

Diese Menge A lässt sich als disjunkte Vereinigung $A = A_a \cup A_{a+1} \cup \ldots \cup A_k$ der Mengen

$$\begin{aligned} A_r = \{\{&x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}, 1, x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_k\} \mid \\ &x_1, x_2, \ldots, x_{r-1} \in \{0, 1\} \text{ mit } x_1 + x_2 + \ldots + x_{r-1} = a - 1 \\ &x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_k \in \{0, 1\}\} \end{aligned}$$

darstellen. Da die Mächtigkeit der Menge A_r (die Menge A_r beschreibt das Ereignis "nach der r-ten Runde ist das Spiel entschieden, wobei der erste Spieler den Gesamtsieg davon trägt") gleich dem Produkt der Mächtigkeit der Menge aller Kombinationen ohne Wiederholung von $a - 1$ aus $r - 1$ Dingen und der Mächtigkeit der Menge aller Variationen mit Wiederholung von $k - r$ aus 2 Dingen ist, gilt

$$\mathbb{P}[A] = \sum_{r=a}^{k} \mathbb{P}[A_r] = \sum_{r=a}^{k} \binom{r-1}{a-1} 2^{k-r} / 2^k = \sum_{r=a}^{k} \binom{r-1}{a-1} / 2^r$$

also speziell

```
a = 8; b = 6; k = a + b - 1;
Sum[Binomial[r - 1, a - 1] / 2^r, {r, a, k}] // N
Clear[a, b, k]
```

```
0.290527
```

8.3.5 Beispiel: In einer Urne liegen m schwarze und $n < m$ rote Kugeln. Es wird ohne Zurücklegen zufällig gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es keinen Augenblick gibt, in dem die Anzahlen der bis dahin gezogenen schwarzen und roten Kugeln übereinstimmen?

▼

Lösung: Wir kommen überein, das Ziehen einer schwarzen Kugel mit +1 und das Ziehen einer roten Kugel mit −1 zu bezeichnen. Für unser Zufallsexperiment ist damit

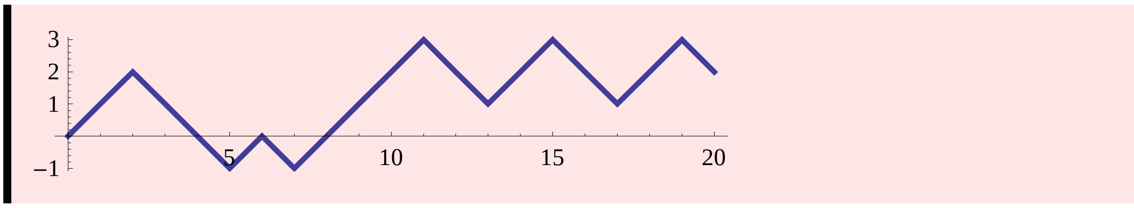
$$\Omega = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_{m+n}\} \mid x_i \in \{+1, -1\} \text{ und } x_1 + x_2 + \ldots + x_{m+n} = m - n\}$$

ein geeigneter Ereignisraum, wobei die Liste $\{x_1, x_2, \ldots, x_{m+n}\} \in \Omega$ der Realisierung "beim i-ten Zug wird eine schwarze Kugel gezogen, wenn $x_i = +1$ ist, und eine rote Kugel gezogen, wenn $x_i = -1$ ist" entspricht und alle diese $\omega \in \Omega$ gleich wahrscheinlich sind. Die Menge Ω ist offenbar bijektiv zur Menge aller Kombinationen ohne Wiederholung von m aus $m + n$ Dingen.

Für unsere weiteren Ausführungen ist es zweckmäßig, jede Realisierung $\omega \in \Omega$ als Linienzug vom Punkt mit den Koordinaten $(0, 0)$ zum Punkt mit den Koordinaten $(m + n, m - n)$ zu interpretieren. Beispielsweise entspricht damit die Realisierung

$$\omega = \{1, 1, -1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1\}$$

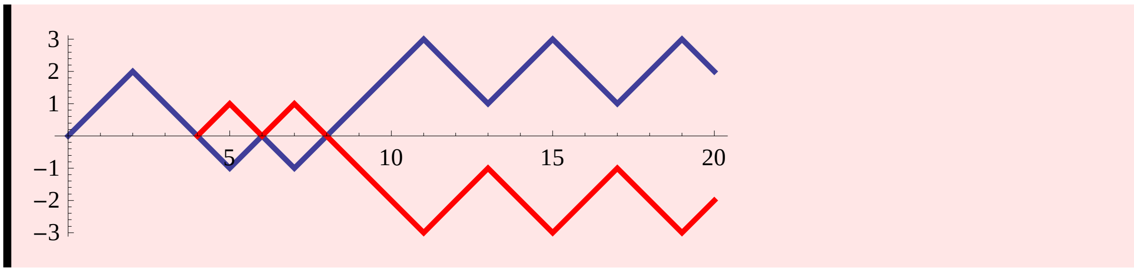
dem Linienzug



Im Fall $m > n$ entspricht das Ereignis "es gibt keinen Augenblick, in dem die Anzahlen der bis dahin gezogenen schwarzen und roten Kugeln übereinstimmen" der Menge

$$A = \{\{1, x_2, x_3, \ldots, x_{m+n}\} \in \Omega \mid \text{für alle } k \in \{2, 3, \ldots, m + n\} \text{ gilt } \sum_{i=2}^{k} x_i \geq 0\}$$

(Für $x_1 = -1$ gibt es nämlich wegen $m > n$ mit Sicherheit einen Augenblick, in dem die Anzahlen der bis dahin gezogenen schwarzen und roten Kugeln übereinstimmen.) Diese Menge A entspricht der Menge aller Linienzüge vom Punkt $(1, 1)$ zum Punkt $(m + n, m - n)$, welche die x-Achse nicht berühren. Die Menge aller Linienzüge vom Punkt $(1, 1)$ zum Punkt $(m + n, m - n)$, welche die x-Achse berühren, ist aber bijektiv zur Menge aller Linienzüge vom Punkt $(1, 1)$ zum Punkt $(m + n, n - m)$. Diese Tatsache (man spricht in diesem Zusammenhang vom Reflexionsprinzip) wird klar, wenn man diese Linienzüge ab jenen Punkten, in denen sie zum ersten Mal die x-Achse berühren, an der x-Achse spiegelt. Die folgende Zeichnung zeigt, wie dieses Spiegeln zu verstehen ist:



Nun entspricht aber die Menge aller Linienzüge vom Punkt $(1, 1)$ zum Punkt $(m + n, m - n)$ der Menge

$$A_1 = \{\{y_1, y_2, \ldots, y_{m+n-1}\} \mid y_i \in \{+1, -1\} \text{ und } y_1 + y_2 + \ldots + y_{m+n-1} = m - n - 1\}$$

und die Menge aller Linienzüge vom Punkt $(1, 1)$ zum Punkt $(m + n, n - m)$ der Menge

$$A_2 = \{\{y_1, y_2, \ldots, y_{m+n-1}\} \mid y_i \in \{+1, -1\} \text{ und } y_1 + y_2 + \ldots + y_{m+n-1} = n - m - 1\}$$

Damit gilt nach unseren obigen Ausführungen (Reflexionsprinzip) für die Mächtigkeit der Menge A

$$|A| = |A_1| - |A_2|$$

wobei A_1 bijektiv zur Menge aller Kombinationen ohne Wiederholung von $m - 1$ aus $m + n - 1$ Dingen und A_2 bijektiv zur Menge aller Kombinationen ohne Wiederholung von $n - 1$ aus $m + n - 1$ Dingen ist. Damit gilt

$$\mathbb{P}[A] = (\binom{m+n-1}{m-1} - \binom{m+n-1}{n-1})/\binom{m+n}{m}$$

also speziell

```
m = 11; n = 9;
(Binomial[m + n - 1, m - 1] - Binomial[m + n - 1, n - 1]) / Binomial[m + n, m] // N
Clear[m, n]
```

```
0.1
```

8.3.6 Beispiel: Vor der Kasse eines Theaters stehen $m = a + b$ Personen, von denen a nur einen 10 € Schein und b nur einen 20 € Schein bei sich haben. Eine Karte kostet 10 €. In der Kasse sind zu Beginn des Kartenverkaufs $u \geq b - a$ 10 € Scheine. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Kartenverkauf ohne Stockung abläuft, also in einem Moment, in dem sich in der Kasse kein 10 € Schein befindet, keine Person eine Karte kaufen will, die nur einen 20 € Schein bei sich hat? (Vergleiche Beispiel 4.2.19 und Beispiel 7.1.15.)

▼

Lösung: Wir kommen wieder überein, eine Person mit einem 10 € Schein mit +1 und eine Person mit einem 20 € Schein mit −1 zu bezeichnen. Die Menge der möglichen Anordnungen (es kommt nur auf die Art der Scheine an) der m Personen vor der Theaterkasse lässt sich dann bekanntlich durch die Menge

$$\Omega = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \mid x_i \in \{-1, 1\} \text{ und } x_1 + x_2 + \ldots + x_m = a - b\}$$

beschreiben, wobei alle Realsierungen $\omega \in \Omega$ gleich wahrscheinlich sind. Die Menge Ω ist offensichtlich bijektiv zur Menge aller Kombinationen ohne Wiederholung von a aus m Dingen.

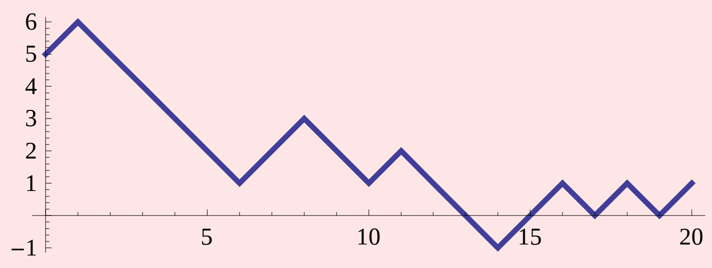
Für unsere weiteren Ausführungen sind weniger die Realsierungen $\omega \in \Omega$ an sich sondern vielmehr die damit verbundenen Listen φ der während des Kartenverkaufs jeweils in der Kasse vorhandenen 10 € Scheine von Interesse. Jede dieser Listen φ kann dabei als Linienzug vom Punkt mit den Koordinaten $(0, u)$ zum Punkt mit den Koordinaten $(m, u + a - b)$ angesehen werden. Im Fall $a = 8$, $b = 12$ und $u = 5$ entspricht damit beispielsweise die Realisierung

$$\omega = \{1, -1, -1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, 1\} \in \Omega$$

der Liste

$$\varphi = \{5, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 1, 0, -1, 0, 1, 0, 1, 0, 1\}$$

der jeweils in der Kasse vorhandenen 10 € Scheine, welche sich ihrerseits durch den folgenden Linienzug veranschaulichen lässt:

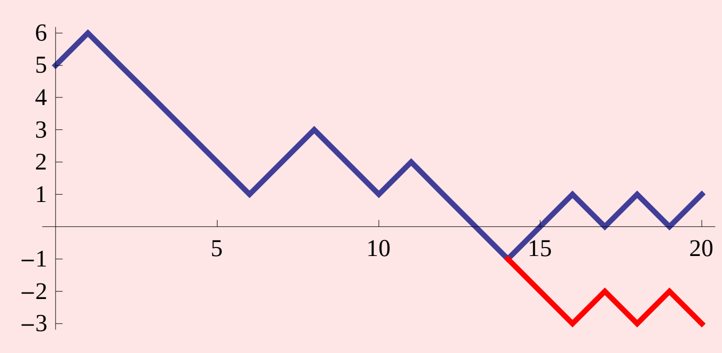


Das Ereignis "der Kartenverkauf läuft ohne Stockung ab" entspricht offenbar der Menge

$$A = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \in \Omega \mid \text{für alle } k \in \{1, 2, \ldots, m\} \text{ gilt } u + x_1 + x_2 + \ldots + x_k \geq 0\}$$

Das Ereignis A^c der Menge aller Linienzüge vom Punkt $(0, u)$ zum Punkt $(m, u + a - b)$, welche die x-Achse schneiden und ist aber bijektiv zur Menge aller Linienzüge vom Punkt $(0, u)$ zum Punkt $(m, b - a - u - 2)$. Diese

Tatsache wird klar, wenn man die der Menge A^c entsprechenden Linienzüge ab jenen Punkten, in denen sie zum ersten Mal die Gerade $y = -1$ berühren, an dieser Geraden spiegelt (Reflexionsprinzip). Die folgende Zeichnung zeigt wieder, wie dieses Spiegeln zu verstehen ist:



Berücksichtigt man, dass die Menge aller Linienzüge vom Punkt $(0, u)$ zum Punkt $(m, b - a - u - 2)$ der Menge

$$A_1 = \{\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m\} \mid x_i \in \{+1, -1\} \text{ und } x_1 + x_2 + \ldots + x_m = b - a - 2\,u - 2\}$$

entspricht, also bijektiv zur Menge aller Kombinationen ohne Wiederholung von $u + a + 1$ aus m Dingen ist, so ergibt sich

$$\mathbb{P}[A] = 1 - \binom{m}{u + a + 1} \Big/ \binom{m}{a}$$

also speziell

```
a = 8; b = 12; m = a + b; u = 5;
1 - Binomial[m, u + a + 1]/Binomial[m, a] // N
Clear[a, b, m, u]
```

```
0.692308
```

8.4 Anwendungen in der Statistischen Physik

Wir betrachten n Teilchen, die sich in k verschiedenen Energiezuständen befinden können. Je nachdem, ob diese Teilchen unterscheidbar oder nicht unterscheidbar sind und je nachdem, ob man annimmt, dass in einem Energiezustand nur Platz für maximal eines oder aber auch Platz für mehrere Teilchen ist, gibt es verschiedene Mikrozustände für dieses System von Teilchen.

8.4.1 Die MAXWELL-BOLTZMANN Statistik: Es wird angenommen, dass die Teilchen prinzipiell unterscheidbar sind und dass in einem Energiezustand Platz für mehrere Teilchen ist. Nummeriert man die Teilchen mit den Zahlen $1, 2, \ldots, n$ und die Energiezustände mit den Zahlen $1, 2, \ldots, k$, so entspricht die Menge der möglichen Mikrozustände dieses Systems der Menge

$$\Omega = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \mid x_i \in \{1, 2, \ldots, k\}\}$$

wobei die Liste $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ dem Mikrozustand "das erste Teilchen befindet sich im Energiezustand x_1, das zweite Teilchen befindet sich im Energiezustand x_2, …, das n-te Teilchen befindet sich im Energiezustand x_n" entspricht. Nimmt man an, dass alle diese Mikrozustände gleich wahrscheinlich sind, so sagt man, unser System von Teilchen genügt der MAXWELL-BOLTZMANN Statistik. Diese Modellannahmen sind dann anwendbar, wenn Quanteneffekte nicht berücksichtigt werden müssen.

8.4.2 Beispiel: Wir betrachten ein System von n Teilchen, welche sich in k verschiedenen Energiezuständen befinden können und nehmen an, dass dieses System von Teilchen der MAXWELL-BOLTZMANN Statistik genügt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für den tatsächlich beobachtbaren Makrozustand "im ersten Energiezustand befinden sich n_1 Teilchen, im zweiten Energiezustand befinden sich n_2 Teilchen, …, im k-ten Energiezustand befinden sich n_k Teilchen"? (Man beachte, dass dabei $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ gelten muss.)

▼

Lösung: Die Menge der gleich wahrscheinlichen Mikrozustände unseres Systems von Teilchen lässt sich gemäß unserer Voraussetzung durch die Menge

$$\Omega = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \mid x_i \in \{1, 2, \ldots, k\}\}$$

beschreiben. Diese Menge entspricht der Menge aller Variationen mit Wiederholung von n aus k Dingen. Der Makrozustand "im ersten Energiezustand befinden sich n_1 Teilchen, im zweiten Energiezustand befinden sich n_2 Teilchen, …, im k-ten Energiezustand befinden sich n_k Teilchen" entspricht damit der Menge

$$A = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in \Omega \mid n_1 \text{ der } x_i \text{ sind gleich } 1,\ \ n_2 \text{ der } x_i \text{ sind gleich } 2,\ \ \ldots,\ \ n_k \text{ der } x_i \text{ sind gleich } k\}$$

Bei dieser Menge A handelt es sich offenbar um die Menge aller Permutationen mit Wiederholung von jeweils $n_1, n_2, \ldots, n_k$ identischen Dingen. Damit gilt für die von uns gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}[A] = \frac{(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!} \frac{1}{k^n}$$

Für $k = 3$ und $n_1 = 3$, $n_2 = 5$, $n_3 = 4$ gilt beispielsweise

```
k = 3; n1 = 3; n2 = 5; n3 = 4; n = n1 + n2 + n3;
Multinomial[n1, n2, n3] / k^n // N
Clear[k, n1, n2, n3, n]
```

```
0.0521601
```

8.4.3 Die BOSE-EINSTEIN Statistik: Es wird angenommen, dass die Teilchen prinzipiell nicht unterscheidbar sind und dass in einem Energiezustand Platz für mehrere Teilchen ist. Da die Teilchen nicht unterscheidbar sind, kann nur festegestellt werden, wieviele Teilchen sich in den einzelnen Energiezuständen befinden. Nummeriert man die Energiezustände mit den Zahlen 1, 2, …, k, so entspricht die Menge der möglichen Mikrozustände dieses Systems der Menge

$$\Omega = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \mid x_i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\} \text{ mit } x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n\}$$

wobei die Liste $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ dem Mikrozustand "im ersten Energiezustand befinden sich x_1 Teilchen, im zweiten Energiezustand befinden sich x_2 Teilchen, …, im k-ten Energiezustand befinden sich x_k Teilchen" entspricht. Nimmt man an, dass alle diese Mikrozustände gleich wahrscheinlich sind, so sagt man, unser System von Teilchen genügt der BOSE-EINSTEIN Statistik. Diese Modellannahmen sind für Bosonen (das sind Teilchen mit ganzzahligem Spin wie etwa Photonen und Mesonen) anwendbar.

8.4.4 Beispiel: Wir betrachten ein System von n Teilchen, welche sich in k verschiedenen Energiezuständen befinden können und nehmen an, dass dieses System von Teilchen der BOSE-EINSTEIN Statistik genügt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei jeder Energiezustand durch mindestens ein Teilchen besetzt ist? (Man beachte, dass dabei $n \geq k$ gelten muss und vergleiche Beispiel 8.2.2.)

▼

Lösung: Die Menge der gleich wahrscheinlichen Mikrozustände unseres Systems von Teilchen lässt sich gemäß unserer Voraussetzung durch die Menge

$$\Omega = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \mid x_i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\} \text{ mit } x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n\}$$

beschreiben. Bei der Menge Ω handelt es sich bekanntlich um die Menge aller Kombinationen mit Wiederholung von n aus k Dingen. Das Ereignis "jeder Energiezustand ist durch mindestens ein Teilchen besetzt" entspricht damit der Menge

$$A = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \Omega \mid \text{für alle } i \in \{1, 2, \ldots, k\} \text{ ist } x_i > 0\}$$

Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses A erfolgt mit Hilfe der Ein-Ausschaltregel. Für alle $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ bezeichnen wir dazu mit

$$A_i = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \Omega \mid x_i = 0\}$$

das Ereignis "der i-te Energiezustand bleibt unbesetzt". Für alle $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_r \le k$ ist der Durchschnitt

$$A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_r} = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \Omega \mid x_{i_1} = 0, x_{i_2} = 0, \ldots, x_{i_r} = 0\} \approx$$

$$\approx \{\{y_1, y_2, \ldots, y_{k-r}\} \mid y_i \in \{0, 1, \ldots, n\} \text{ mit } y_1 + y_2 + \ldots + y_{k-r} = n\}$$

offensichtlich bijektiv zur Menge aller Kombinationen mit Wiederholung von n aus $k - r$ Dingen, was

$$\mathbb{P}[A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_r}] = \binom{k+n-r-1}{n} / \binom{k+n-1}{n}$$

zur Folge hat. Mit der Ein-Ausschaltregel ergibt sich damit für die von uns gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[{A_1}^c \cap {A_2}^c \cap \ldots \cap {A_k}^c] = \mathbb{P}[(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k)^c] = 1 - \mathbb{P}[A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k] =$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}[A_i] + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{k} \mathbb{P}[A_i \cap A_j] - + \ldots + (-1)^k\, \mathbb{P}[A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k] =$$

$$= [\binom{k}{0}\binom{n+k-1}{n} - \binom{k}{1}\binom{n+k-2}{n} + \binom{k}{2}\binom{n+k-3}{n} - + \ldots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}\binom{n}{n}] / \binom{n+k-1}{n}$$

Speziell ergibt sich für $k = 5$ und $n = 8$

```
k = 5; n = 8;
Sum[(-1)^j Binomial[k, j] Binomial[k + n - 1 - j, n], {j, 0, k - 1}] / Binomial[n + k - 1, n] // N
Clear[k, n]
```

```
0.0707071
```

8.4.5 Die FERMI-DIRAC Statistik: Es wird angenommen, dass die Teilchen prinzipiell nicht unterscheidbar sind und dass in einem Energiezustand nur Platz für höchstens ein Teilchen ist (Pauliverbot). Da die Teilchen nicht unterscheidbar sind, kann nur festgestellt werden, ob ein Energiezustand besetzt ist oder nicht besetzt ist. Nummeriert man die Energiezustände mit den Zahlen $1, 2, \ldots, k$, so entspricht die Menge der möglichen Mikrozustände dieses Systems der Menge

$$\Omega = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \mid x_i \in \{0, 1\} \text{ mit } x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n\}$$

wobei die Liste $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ dem Mikrozustand "der i-te Energiezustand ist genau dann besetzt, wenn $x_i = 1$ ist" entspricht. Nimmt man an, dass alle diese Mikrozustände gleich wahrscheinlich sind, so sagt man, unser System von Teilchen genügt der FERMI-DIRAC Statistik. Diese Modellannahmen sind für Fermionen (das sind Teilchen mit halbzahligem Spin wie etwa Elektronen, Protonen und Neutronen) anwendbar.

8.4.6 Beispiel: Wir betrachten ein System von n Teilchen, welche sich in k verschiedenen Energiezuständen befinden können und nehmen an, dass dieses System von Teilchen der FERMI-DIRAC Statistik genügt. Weiters nehmen wir an, dass die ersten k_1 Energiezustände das Energieniveau E_1, die nächsten k_2 Energiezustände das Energieniveau E_2, … und die restlichen k_m Energiezustände das Energieniveau E_m besitzen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Energieniveau E_i von keinem Teilchen besetzt ist? (Man beachte, dass dabei $k - k_i \geq n$ gelten muss.)

▼

Lösung: Die Menge der gleich wahrscheinlichen Mikrozustände unseres Systems von Teilchen lässt sich gemäß unserer Voraussetzung durch die Menge

$$\Omega = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \mid x_i \in \{0, 1\} \text{ mit } x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n\}$$

beschreiben. Bei der Menge Ω handelt es sich bekanntlich um die Menge aller Kombinationen ohne Wiederholung von n aus k Dingen. Das Ereignis "das Energieniveau E_i ist von keinem Teilchen besetzt" entspricht damit der Menge

$$A_i = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \Omega \mid \text{mit } x_{k_1+\ldots+k_i+1} = x_{k_1+\ldots+k_i+2} = \ldots = x_{k_1+\ldots+k_{i+1}} = 0\} \approx$$

$$\approx \{\{y_1, y_2, \ldots, y_{k-k_i}\} \mid y_i \in \{0, 1\} \text{ mit } y_1 + y_2 + \ldots + y_{k-k_i} = n\}$$

Diese Menge A_i ist aber (alle n Teilchen müssen auf die restlichen $k - k_i$ Energiezustände verteilt werden) bijektiv zur Menge aller Kombinationen ohne Wiederholung von n aus $k - k_i$ Dingen. Für die von uns gesuchte Wahrscheinlichkeit gilt somit

$$\mathbb{P}[A_i] = \binom{k - k_i}{n} / \binom{k}{n}$$

Speziell ergeben sich damit für $k_1 = 5$, $k_2 = 3$, $k_3 = 4$, $k_4 = 6$ und $n = 8$ die folgenden Wahrscheinlichkeiten dafür, dass die einzelnen Energiezustände von keinem Teilchen besetzt sind:

```
k1 = 5; k2 = 3; k3 = 4; k4 = 6; k = k1 + k2 + k3 + k4; n = 8;
Binomial[k − {k1, k2, k3, k4}, n] / Binomial[k, n] // N
Clear[k1, k2, k3, k4, k, n]
```

```
{0.0294118, 0.147059, 0.0686275, 0.0113122}
```

Der Begriff Statistik bei "MAXWELL-BOLTZMANN Statistik" bzw "BOSE-EINSTEIN Statistik" bzw "FERMI-DIRAC Statistik" hat nichts mit dem in der Stochastik verwendeten Begriff Statistik zu tun und sollte besser durch Modell ersetzt werden.