§14 Stetige Verteilungen

▼

In Kapitel 13 haben wir uns mit der Verteilungsdichte diskreter Verteilungen befasst. In diesem Kapitel werden wir uns mit der Verteilungsdichte stetiger Verteilungen beschäftigen. Dabei werden wir von dem bereits in Kapitel 12 erwähnten infinitesimalen Denken intensiv Gebrauch machen und damit schwierig darzustellende Sachverhalte intuitiv besser erfassen.

14.1 Verteilungsdichten stetiger Verteilungen

Wir beginnen mit einer zentralen Eigenschaft stetiger Verteilungen $\mathbb{P}$ (vgl dazu Beispiel 12.2.4):

14.1.1 Bemerkung: Ist $\mathbb{P}$ eine stetige Verteilung, so gilt für alle Mengen $B \subseteq \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}[B] = \sum_{z \in B} \mathbb{P}[[z, z + dz]] = \int_B \mathbb{P}[[z, z + dz]]$$

Die stetige Verteilung $\mathbb{P}$ ist somit durch die Angabe der Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}[[z, z + dz]]$ der infinitesimalen Intervalle $[z, z + dz]$ vollständig bestimmt.

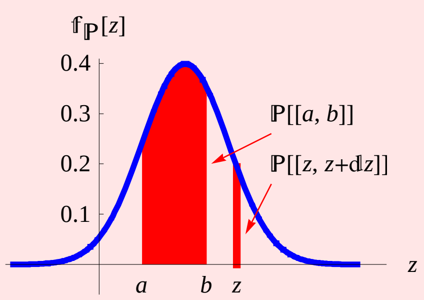
Wir nehmen diese Erkenntnis zum Anlass und definieren:

14.1.2 Definition: Unter der Verteilungsdichte (Probability Density Function oder kurz PDF) $\mathbb{f}_{\mathbb{P}}$ einer stetigen Verteilung $\mathbb{P}$ versteht man die Abbildung

$$\mathbb{f}_{\mathbb{P}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \mathbb{f}_{\mathbb{P}}[z]\, dz = \mathbb{P}[[z, z + dz]]$$

Wegen Bemerkung 14.1.1 ist die stetige Verteilung $\mathbb{P}$ durch ihre Verteilungsdichte $\mathbb{f}_{\mathbb{P}}$ vollständig bestimmt.

Die folgende Zeichnung zeigt die Verteilungsdichte $\mathbb{f}_{\mathbb{P}}$ einer stetigen Verteilung $\mathbb{P}$. Dabei entspricht der rote Balken beim Wert z der infinitesimalen Wahrscheinlichkeit $\mathbb{f}_{\mathbb{P}}[z]\, dz = \mathbb{P}[[z, z + dz]]$ und die rot eingezeichnete Fläche unter der Funktion $\mathbb{f}_{\mathbb{P}}$ im Bereich $[a, b]$ der Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[[a, b]]$ des Intervalls $[a, b]$.



14.1.3 Bemerkung: Für die Verteilungsdichte $\mathbb{f}_{\mathbb{P}}$ einer stetigen Verteilung $\mathbb{P}$ gilt

a) Für alle $z \in \mathbb{R}$ ist $\mathbb{f}_{\mathbb{P}}[z] \geq 0$;

b) Das Integral über alle Werte $\mathbb{f}_{\mathbb{P}}[z]$ ergibt den Wert 1, es gilt also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{f}_{\mathbb{P}}[z]\, dz = 1$$

Diese beiden Eigenschaften sind charakteristisch in dem Sinn, dass jede Funktion $\mathbb{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit diesen Eigenschaften als Verteilungsdichte einer stetigen Verteilung $\mathbb{P}$ aufgefasst werden kann. Man nennt diese beiden Eigenschaften daher die charakteristischen Eigenschaften der Verteilungsdichte einer stetigen Verteilung.

Aus Bemerkung 14.1.1 folgt unmittelbar

14.1.4 Bemerkung: Ist $\mathbb{f}_{\mathbb{P}}$ die Verteilungsdichte der stetigen Verteilung $\mathbb{P}$, so gilt für alle $B\subseteq\mathbb{R}$

$$\mathbb{P}[B]=\int_B \mathbb{f}_{\mathbb{P}}[z]\,dz$$

Für Intervalle $B=[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ (bzw die Vereinigung von derartigen Intervallen) und stückweise stetige Verteilungsdichten $\mathbb{f}_{\mathbb{P}}$ ist dieses Integral als gewöhnliches RIEMANN-Integral aufzufassen. In allen anderen Fällen interpretiere man dieses Integral als LEBESGUE-Integral.

14.2 Verteilungsdichten in *Mathematica*

Mit dem folgenden Befehl lässt sich die Verteilungsdichte $\mathbb{f}$ einer in *Mathematica* implementierten stetigen Verteilungen (numerisch und formelmäßig) auswerten:

■ PDF[*distribution*, *z*]

wertet die Verteilungsdichte $\mathbb{f}$ der stetigen Verteilung *distribution* an der Stelle z (sowohl numerisch als auch formelmäßig) aus. Die Verteilungsdichten stetiger Verteilungen sind Funktionen im Sinn von *Mathematica* und lassen sich daher mit dem Befehl Plot zeichnen.

Manche dieser Verteilungsdichten verwenden die Gamma-Funktion bzw die Beta-Funktion (diese Funktionen werden in *Mathematica* mit den Befehlen Gamma bzw Beta aufgerufen). Wir definieren diese beiden Funktionen und fassen ihre wichtigsten Eigenschaften in einem Satz zusammen:

14.2.1 Definition:
a) Unter der Gamma-Funktion versteht man die Abbildung

$$\Gamma:]0,\infty[\to\mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \Gamma[\alpha]=\int_0^\infty t^{\alpha-1}\,e^{-t}\,dt$$

b) Unter der Beta-Funktion versteht man die Abbildung

$$\mathrm{B}:]0,\infty[\times]0,\infty[\to\mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \mathrm{B}[\alpha,\beta]=\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt$$

Man zeigt mühelos

14.2.2 Satz: Elementare Eigenschaften der Gamma-Funktion bzw der Beta-Funktion:
a) Es gilt $\Gamma[1]=1$ und $\Gamma[1/2]=\sqrt{\pi}$
b) Für alle $\alpha>0$ gilt $\Gamma[\alpha+1]=\alpha\,\Gamma[\alpha]$
c) Für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt wegen a) und b) damit offenbar $\Gamma[n+1]=n!$
d) Für alle $\alpha,\beta>0$ gilt

$$\mathrm{B}[\alpha,\beta]=\frac{\Gamma[\alpha]\,\Gamma[\beta]}{\Gamma[\alpha+\beta]}$$

▼

Wir wollen nun die Verteilungsdichten $\mathbb{f}$ der wichtigsten in *Mathematica* implementierten stetigen Verteilungen analysieren. Unser Ziel besteht dabei wieder darin, diese Verteilungsdichten formelmäßig explizit anzugeben und mit Hilfe von ListPlot und Manipulate auf dynamische Weise graphisch darzustellen.

14.2.3 Beispiel: Man ermittle die Verteilungsdichte der Gleichverteilung $\mathcal{U}[\{a, b\}]$ auf dem Intervall $[a, b]$ und zeichne diese Verteilungsdichte.

▼

14.2.4 Beispiel: Man ermittle die Verteilungsdichte der Dreiecksverteilung $\mathcal{D}[\{a, b\}]$ auf dem Intervall $[a, b]$ und zeichne diese Verteilungsdichte.

▼

14.2.5 Beispiel: Man ermittle die Verteilungsdichte der Exponentialverteilung $\mathcal{E}[\lambda]$ mit dem Parameter $\lambda > 0$ und zeichne diese Verteilungsdichte.

▼

14.2.6 Beispiel: Man ermittle die Verteilungsdichte der Gammaverteilung $\mathcal{G}amma[\alpha, \lambda]$ mit den Parametern $\alpha > 0$ und $\lambda > 0$ und zeichne diese Verteilungsdichte.

▼

14.2.7 Beispiel: Man ermittle die Verteilungsdichte der Laplaceverteilung $\mathcal{L}[\alpha, \lambda]$ mit den Parametern $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\lambda > 0$ und zeichne diese Verteilungsdichte.

▼

14.2.8 Beispiel: Man ermittle die Verteilungsdichte der Betaverteilung $\mathcal{B}eta[\alpha, \beta]$ mit den Parametern $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ und zeichne diese Verteilungsdichte.

▼

14.2.9 Beispiel: Man ermittle die Verteilungsdichte der Normalverteilung $\mathcal{N}[\mu, \sigma]$ mit den Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ und zeichne diese Verteilungsdichte.

▼

14.2.10 Beispiel: Man ermittle die Verteilungsdichte der logarithmischen Normalverteilung $\mathcal{LN}[\mu, \sigma]$ mit den Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ und zeichne diese Verteilungsdichte.

▼

14.2.11 Beispiel: Man ermittle die Verteilungsdichte der Chi-Quadrat Verteilung $\mathcal{C}hi[n]$ mit dem Parameter $n \in \mathbb{N}$ und zeichne diese Verteilungsdichte.

▼

14.2.12 Beispiel: Man ermittle die Verteilungsdichte der Student T Verteilung $\mathcal{T}[n]$ mit dem Parameter $n \in \mathbb{N}$ und zeichne diese Verteilungsdichte.

▼

14.2.13 Beispiel: Man ermittle die Verteilungsdichte der Fisher F Verteilung $\mathcal{F}[m, n]$ mit den Parametern $m, n \in \mathbb{N}$ und zeichne diese Verteilungsdichte.

▼

14.2.14 Beispiel: Man ermittle die Verteilungsdichte der Weibullverteilung $\mathcal{W}[\alpha, \beta]$ mit den Parametern $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ und zeichne diese Verteilungsdichte.

▼

14.2.15 Beispiel: Man ermittle die Verteilungsdichte der Extremwertverteilung $\mathcal{E}xtrem[\mu, \beta]$ mit den Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\beta > 0$ und zeichne diese Verteilungsdichte.

▼

14.2.16 Beispiel: Man ermittle die Verteilungsdichte der Rayleighverteilung $\mathcal{R}[\sigma]$ mit dem Parameter $\sigma > 0$ und zeichne diese Verteilungsdichte.

▼

14.2.17 Bemerkung: Zwischen diesen stetigen Verteilungen bestehen die folgenden Beziehungen (in den folgenden Abschnitten werden wir noch weitere Beziehungen zwischen diesen Verteilungen kennen lernen):

a) $\mathcal{G}amma[1, 1/\lambda] = \mathcal{E}[\lambda]$
b) $\mathcal{G}amma[n/2, 2] = \mathcal{C}hi[n]$
c) $\mathcal{E}[1/2] = \mathcal{C}hi[2]$
d) $\mathcal{B}eta[1, 1] = \mathcal{U}[0, 1]$
e) $\mathcal{W}[1, 1/\beta] = \mathcal{E}[\beta]$
f) $\mathcal{W}\left[2, \sqrt{2}\,\sigma\right] = \mathcal{R}[\sigma]$

▼

14.3 Verteilungsdichten von stetigen Zufallsvariablen

Bisher haben wir uns mit den Verteilungsdichten $\mathbb{f}_{\mathbb{P}}$ von stetigen Verteilungen $\mathbb{P}$ beschäftigt. In diesem Abschnitt wollen wir uns nun mit den Verteilungsdichten $\mathbb{f}_Z$ von stetigen Zufallsvariablen Z befassen.

14.3.1 Definition: Unter der Verteilungsdichte $\mathbb{f}_Z$ einer stetigen Zufallsvariablen Z versteht man die Verteilungsdichte der Verteilung $\mathbb{P}_Z$ von Z, also die Abbildung

$$\mathbb{f}_Z : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \mathbb{f}_Z[z]\, dz = \mathbb{P}[\{Z \in [z, z + dz]\}]$$

Wegen Bemerkung 14.1.1 ist die Verteilung $\mathbb{P}_Z$ der stetigen Zufallsvariablen Z durch ihre Verteilungsdichte $\mathbb{f}_Z$ bereits vollständig bestimmt.

An Hand von Beispielen werden wir zeigen, wie sich die Verteilungsdichte $\mathbb{f}_Z$ einer stetigen Zufallsvariablen Z ermitteln lässt. Es werden sich dabei Verteilungsdichten ergeben, welche nicht in *Mathematica* implementiert sind.

In vielen Fällen wird es sich bei den in diesen Beispielen ermittelten Verteilungsdichten um "gestückelte" Funktionen handeln. Wir werden zeigen, wie sich diese "gestückelten" Verteilungsdichten unter Verwendung der Funktion Piecewise in geschlossener Form darstellen lassen und damit einer weiteren Behandlung (Integration, Differentiation, …) durch *Mathematica* zugänglich werden.

■ Piecewise[{{$wert_1$, $intervall_1$}, {$wert_2$, $intervall_2$}, …}]

bezeichnet jene gestückelte Funktion, welche im Intervall $intervall_1$ den Wert $wert_1$, im Intervall $interall_2$ den Werte $wert_2$, … annimmt. Intervalle, in denen diese Funktion den Wert 0 annimmt, müssen dabei nicht extra angeführt werden.

14.3.2 Beispiel: Aus dem Intervall [0, 1] werden zufällig n Zahlen ausgewählt und ihr Minimum Z beobachtet. Man ermittle die Verteilungsdichte $\mathbb{f}_Z$ der Zufallsvariablen Z.

▼

Lösung: a) Für unser Zufallsexperiment "zufälliges Ziehen von n Zahlen aus dem Intervall [0, 1]" ist die Menge

$$\Omega = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0, 1]\} = [0, 1] \times [0, 1] \times \ldots \times [0, 1]$$

offenbar ein passender Ereignisraum, wobei die Liste $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in \Omega$ der Realisierung "beim i-ten Zug wird die Zahl x_i ausgewählt" entspricht. Interpretiert man dieses "zufällige Auswählen von n Zahlen aus dem Intervall [0, 1]" in der Weise, dass diese Zahlen unabhängig voneinander und gleichverteilt aus dem Intervall [0, 1] ausgewählt werden, so gilt für beliebige Intervalle $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq [0, 1]$

$$\mathbb{P}[A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n] = \frac{\text{Länge von } A_1}{\text{Länge von } [0, 1]} \cdot \frac{\text{Länge von } A_2}{\text{Länge von } [0, 1]} \cdot \ldots \cdot \frac{\text{Länge von } A_n}{\text{Länge von } [0, 1]}$$

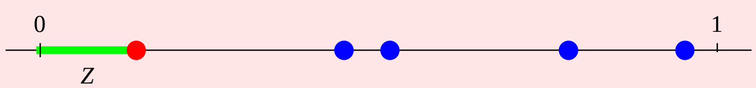
b) Die Beobachtung des Minimums der n ausgewählten Zahlen lässt sich durch die Zufallsvariable

$$Z : \Omega \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad Z[\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}] = \text{Min}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$$

beschreiben. Die Zufallsvariable Z kann alle Werte z aus dem Intervall $\mathbb{T}_Z = [0, 1]$ annehmen, wobei keiner dieser Werte mit positiver Wahrscheinlichkeit auftritt. Die Zufallsvariable Z ist damit stetig.

c) Jener Zufallsmechanismus, mit dem diese n Zahlen ausgewählt werden, kann mit dem Befehl AuswahlVonZahlenAusEinheitsintervall simuliert werden:

```
AuswahlVonZahlenAusEinheitsintervall[5]
```



d) Vernachlässigt man Größen der Ordnung $(d z)^2$, so gilt für alle $z \in [0, 1]$ offenbar

$$\mathbb{P}[\{Z \in [z, z + dz]\}] = \mathbb{P}[\bigcup_{i=1}^{n} [z + dz, 1] \times \ldots \times \underbrace{[z, z + dz]}_{i\text{–te Stelle}} \times \ldots \times]z + dz, 1]] = n\, dz\, (1 - z)^{n-1}$$

und damit

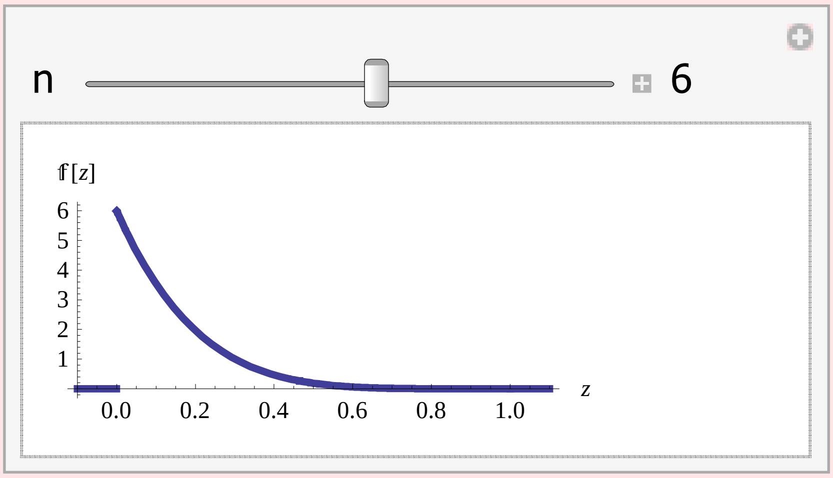
$$\mathbb{f}_Z[z] = \frac{1}{dz} \mathbb{P}[\{Z \in [z, z + dz]\}] = \begin{cases} n\,(1 - z)^{n-1} & \text{für } 0 \le z \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

e) Diese "gestückelte" Verteilungsdichte lässt sich mit Hilfe von Piecewise mühelos in *Mathematica* eingeben

```
fs1[z_, n_] := Piecewise[{{n (1 - z)^(n-1), 0 ≤ z ≤ 1}}]
```

und für beliebige Werte von n auf dynamische Weise graphisch darstellen:

```
Manipulate[Plot[fs1[z, n], {z, −0.1, 1.1},
    PlotStyle → Thickness[0.015], AspectRatio → 0.4, AxesOrigin → {−0.1, 0}, PlotRange → All,
    AxesLabel → {z, 𝕗[z]}, ImageSize → {200, 100}],
  {n, 1, 10, 1, Appearance → "Labeled"}]
```



f) Für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim zufälligen Auswählen von $n = 5$ Zahlen aus dem Intervall [0, 1] die kleinste dabei gezogene Zahl Z einen Wert zwischen $a = 0.2$ und $b = 0.4$ annimmt, also für die Wahrscheinlichkeit (man vergleiche dazu Bemerkung 14.1.4)

$$\mathbb{P}[\{Z \in [a, b]\}] = \int_a^b \mathbb{f}_Z[z]\, dz$$

gilt damit (Integrale lassen sich in *Mathematica* mit den Befehlen Integrate bzw NIntegrate berechnen)

```
n = 5; a = 0.2; b = 0.4;
NIntegrate[fs1[z, n], {z, a, b}]
Clear[n, a, b]
```

```
0.24992
```

14.3.3 Beispiel: Ein Punkt wird zufällig in den ersten Quadrant des Einheitskreises geworfen und seine x-Koordinate Z bestimmt. Man ermittle die Verteilungsdichte $\mathbb{f}_Z$ von Z.

▼

Lösung: a) Für unser Zufallsexperiment "Werfen eines Punktes in den ersten Quadrant des Einheitskreises" ist die Menge

$$\Omega = \{\{x, y\} \mid x, y \geq 0 \text{ und } x^2 + y^2 \leq 1\}$$

ein passender Ereignisraum, wobei die Liste $\{x, y\} \in \Omega$ der Realisierung "der zufällige Punkt besitzt die Koordinaten $\{x, y\}$" entspricht. Interpretiert man dieses "zufällige Werfen eines Punktes" in der Weise, dass dieser Punkt gleichverteilt in den ersten Quadrant des Einheitskreises geworfen wird, so gilt für alle Teilmengen $A \subseteq \Omega$

$$\mathbb{P}[A] = \frac{\text{Flächeninhalt von } A}{\text{Flächeninhalt von } \Omega}$$

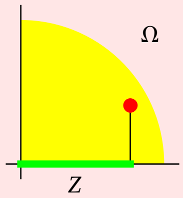
b) Die Beobachtung der x-Koordinate des zufälligen Punktes lässt sich durch die Zufallsvariable

$$Z : \Omega \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad Z[\{x, y\}] = x$$

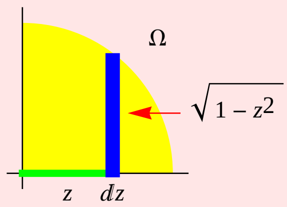
beschreiben. Die Zufallsvariable Z kann alle Werte z aus dem Intervall $\mathbb{T}_Z = [0, 1]$ annehmen, wobei keiner dieser Werte mit positiver Wahrscheinlichkeit auftritt und ist somit stetig.

c) Jener Zufallsmechanismus, mit dem dieser Punkt in den ersten Quadrant des Einheitskreises geworfen wird, lässt sich mit dem Befehl WerfenEinesPunktesInEinheitskreis simulieren:

```
WerfenEinesPunktesInEinheitskreis
```



d) In der folgenden Zeichnung ist das infinitesimale Ereignis $\{Z \in [z, z + dz]\}$ (das ist der blau eingezeichnete Balken mit der x-Koordinate z und der Dicke dz) graphisch dargestellt.



An Hand dieser Zeichnung erkennt man unmittelbar

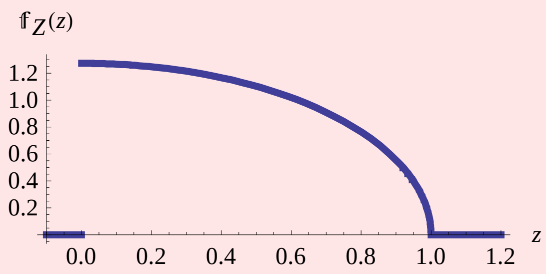
$$\mathbb{f}_Z[z] = \frac{1}{dz}\, \mathbb{P}[\{Z \in [z, z + dz]\}] = \begin{cases} \frac{4}{\pi} \sqrt{1 - z^2} & \text{für } 0 \leq z \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

d) Wir geben diese "gestückelte" Verteilungsdichte wieder in geschlossener Form in *Mathematica* ein

```
fs2[z_] := Piecewise[{{4 Sqrt[1 - z^2] / π, 0 ≤ z ≤ 1}}]
```

und zeichnen diese Verteilungsdichte

```
Plot[fs2[z], {z, -0.1, 1.2}, PlotStyle → Thickness[0.015], AspectRatio → 0.4, AxesOrigin → {-0.1, 0},
  PlotRange → All, AxesLabel → {z, f_Z[z]}]
```



e) Für die Wahrscheinlichkeit, dass die x-Koordinate Z dieses zufällig ausgewählten Punktes einen Wert zwischen $a = 0.2$ und $b = 0.5$ annimmt, also für die Wahrscheinlichkeit (man vergleiche dazu Bemerkung 14.1.4)

$$\mathbb{P}[\{Z \in [a, b]\}] = \int_a^b \mathbb{f}_Z[z]\, dz$$

gilt damit

```
a = 0.2; b = 0.5;
NIntegrate[fs2[z], {z, a, b}]
Clear[a, b]
```

```
0.356058
```

14.3.4 Beispiel: Auf der unteren und der linken Seitenkante eines Quadrats der Seitenlänge 1 werden willkürlich zwei Punkte P und Q ausgewählt. Man ermittle die Verteilungsdichte $\mathbb{f}_Z$ ihres Abstandes Z.

▼

Lösung: a) Für unser Zufallsexperiment "willkürliche Auswahl der beiden Punkte P und Q auf der unteren und der linken Seitenkante eines Quadrats der Seitenlänge 1" ist die Menge

$$\Omega = \{\{x,\ y\} \mid x,\ y \in [0,\ 1]\}$$

ein passender Ereignisraum, wobei die Liste $\{x,\ y\} \in \Omega$ der Realisierung "der Punkt P hat die Koordinaten $\{x,\ 0\}$ und der Punkt Q hat die Koordinaten $\{0,\ y\}$" entspricht. Wir interpretieren dieses "willkürliche Auswählen" in der Weise, dass die beiden Punkte P und Q auf den entsprechenden Seitenkanten unabhängig voneinander und gle-ichverteilt ausgewählt werden. Für alle Teilmengen $A \subseteq \Omega$ gilt damit

$$\mathbb{P}[A] = \frac{\text{Flächeninhalt von } A}{\text{Flächeninhalt von } \Omega}$$

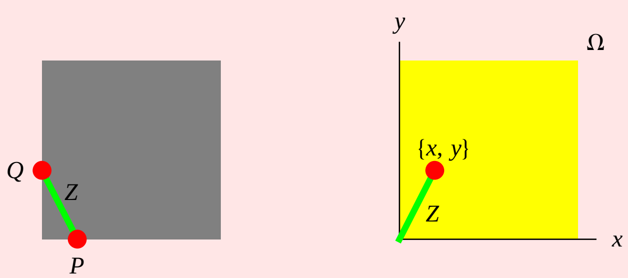
b) Die Beobachtung des Abstandes der beiden Punkte lässt sich durch die Zufallsvariable

$$Z : \Omega \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad Z[\{x,\ y\}] = \sqrt{x^2 + y^2}$$

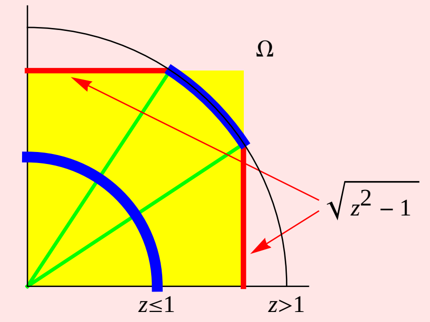
beschreiben. Die Zufallsvariable Z kann alle Werte z aus dem Intervall $\mathbb{I}_Z = [0,\ \sqrt{2}\,]$ annehmen, wobei keiner dieser Werte mit positiver Wahrscheinlichkeit auftritt. Z ist damit eine stetige Zufallsvariable.

c) Jener Zufallsmechanismus, mit dem diese beiden Punkte P und Q ausgewählt werden, lässt sich mit dem Befehl PunkteAufSeitenkantenEinheitsquadrat simulieren. Im linken (grauen) Quadrat sind die beiden zufällig aus-gewählten Punkte P und Q sowie ihr gegenseitiger Abstand Z dargestellt. Das rechte (gelbe) Quadrat stellt den Ereignisraum Ω dar. Der rote Punkt mit den Koordinaten $\{x,\ y\}$ entspricht der in der linken Zeichnung dargestellten Realisierung. Der Abstand Z der beiden Punkte P und Q entspricht nun dem Abstand dieses Punktes vom Ursprung:

```
PunkteAufSeitenkantenEinheitsquadrat
```



d) In der folgenden Zeichnung sind die infinitesimalen Ereignisse $\{Z \in [z,\ z + dz]\}$ (es handelt sich dabei um die blau eingezeichneten Kreisbögen mit Radius z und Dicke dz) für $z \leq 1$ bzw $z > 1$ graphisch dargestellt.



Eine einfache elementargeometrische Überlegungen liefert (man berechne dazu den Flächeninhalt der blau eingezeichneten Kreisbögen mit Radius z und Dicke dz)

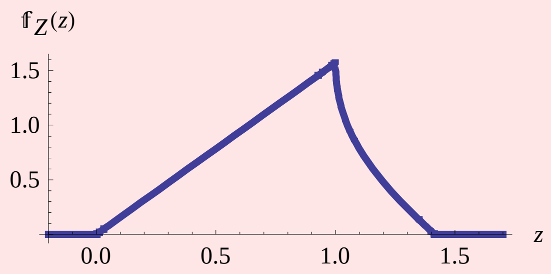
$$\mathbb{f}_Z[z] = \frac{1}{dz}\,\mathbb{P}[\{Z \in [z, z + dz]\}] = \begin{cases} z\,\pi/2 & \text{für } 0 \le z < 1 \\ z\,\pi/2 - 2\,z\,\text{ArcTan}\left[\sqrt{z^2 - 1}\,\right] & \text{für } 1 \le z \le \sqrt{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

e) Wir geben diese Verteilungsdichte wieder in der üblichen Weise in *Mathematica* ein

```
fs3[z_] := Piecewise[{{z π/2, 0 ≤ z ≤ 1}, {z π/2 − 2 z ArcTan[Sqrt[z^2 − 1]], 1 ≤ z ≤ Sqrt[2]}}]
```

und zeichnen diese Verteilungsdichte:

```
Plot[fs3[z], {z, −0.2, 1.7}, PlotStyle → Thickness[0.015], AspectRatio → 0.4, AxesOrigin → {−0.2, 0},
  PlotRange → All, AxesLabel → {z, 𝕗Z[z]}]
```



f) Für die Wahrscheinlichkeit, dass der Abstand dieser beiden Punkte P und Q einen Wert zwischen $a = 0.5$ und $b = 1.1$ annimmt, also für die Wahrscheinlichkeit (man vergleiche dazu wieder Bemerkung 14.1.4)

$$\mathbb{P}[\{Z \in [a, b]\}] = \int_a^b \mathbb{f}_Z[z]\,dz$$

gilt damit

```
a = 0.5; b = 1.2;
NIntegrate[fs3[z], {z, a, b}]
Clear[a, b]
```

```
0.754562
```

14.3.5 Beispiel: n Punkte werden zufällig in den Einheitskreis geworfen und der Abstand Z vom Mittelpunkt des Einheitskreises zum nächst gelegenen dieser n Punkte beobachtet. Man ermittle die Verteilungsdichte $\mathbb{f}_Z$ von Z.

▼

Lösung: a) Für unser Zufallsexperiment "zufälliges Werfen von n Punkten in den Einheitskreis" ist die Menge

$$\Omega = \{\{\{x_1,\ y_1\},\ \{x_2,\ y_2\},\ \ldots,\ \{x_n,\ y_n\}\} \mid x_i,\ y_i \in \mathbb{R} \text{ mit } x_i{}^2 + y_i{}^2 \le 1\}$$

ein passender Ereignisraum, wobei die Liste $\{\{x_1,\ y_1\},\ \{x_2,\ y_2\},\ \ldots,\ \{x_n,\ y_n\}\} \in \Omega$ der Realisierung "der erste Punkt besitzt die Koordinaten $\{x_1,\ y_1\}$, der zweite Punkt besitzt die Koordinaten $\{x_2,\ y_2\}$, …, der n-te Punkt besitzt die Koordinaten $\{x_n,\ y_n\}$" entspricht. Wir interpretieren dieses "zufällige Werfen von n Punkten in den Einheitskreis" in der Weise, dass alle n Punkte unabhängig voneinander im Einheitskreis Ξ gleichverteilt sind. Für alle Teilmengen $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ des Einheitskreises Ξ gilt damit

$$\mathbb{P}[A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n] = \frac{\text{Flächeninhalt von } A_1}{\text{Flächeninhalt von } \Xi} \cdot \frac{\text{Flächeninhalt von } A_2}{\text{Flächeninhalt von } \Xi} \cdot \ldots \cdot \frac{\text{Flächeninhalt von } A_n}{\text{Flächeninhalt von } \Xi}$$

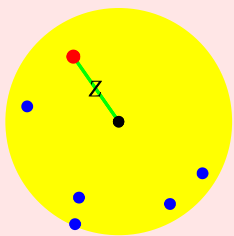
b) Die Beobachtung des Abstandes des Mittelpunktes des Einheitskreises zum nächst gelegenen dieser n Punkte lässt sich durch die Zufallsvariable

$$Z : \Omega \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad Z[\{x,\ y\}] = \text{Min}[\sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2}\,,\ \sqrt{x_2{}^2 + y_2{}^2}\,,\ \ldots,\ \sqrt{x_n{}^2 + y_n{}^2}\,]$$

beschreiben. Diese Zufallsvariable Z kann alle Werte z aus dem Intervall $\mathbb{I}_Z = [0,\ 1]$ annehmen, wobei keiner dieser Werte mit positiver Wahrscheinlichkeit auftritt und ist damit stetig.

c) Jener Zufallsmechanismus, mit dem diese n Punkte ausgewählt werden, lässt sich mit dem Befehl PunkteInEinheitskreis simulieren. Der rote Punkte kennzeichnet dabei jenen Punkt, welcher vom schwarz eingezeichneten Mittelpunkt des Einheitskreises den kleinsten Abstand hat. Dieser kleinste Abstand Z ist grün markiert:

```
PunkteInEinheitskreis[6]
```



d) Bezeichnet für alle $z \in [0,\ 1]$

$$A_{i,z} = \{\{x_i,\ y_i\} \mid x_i,\ y_i \in \mathbb{R} \text{ und } z^2 \le x_1{}^2 + y_i{}^2 \le (z + d z)^2\}$$

das Ereignis, dass der i-te Punkte in einen Kreisring mit Radius z und Dicke dz gelangt und

$$B_{j,z} = \{\{x_j,\ y_j\} \mid x_j,\ y_j \in \mathbb{R} \text{ und } z^2 \le x_j{}^2 + y_j{}^2\}$$

das Ereignis, dass der j-te Punkt nicht in den Kreis mit Radius z fällt, so gilt (Größen der Ordnung $(dz)^2$ werden wieder vernachlässigt)

$$\mathbb{P}[\{Z \in [z,\ z + d z]\}] = \mathbb{P}[\bigcup_{i=1}^{n} B_{1,z} \times \ldots \times B_{i-1,z} \times A_{i,z} \times B_{i+1,z} \times \ldots \mathrm{B}_{n,z}] = n\ \frac{2\, z\, \pi\, d z}{\pi}\ (1 - \frac{z^2\, \pi}{\pi})^{n-1}$$

und damit

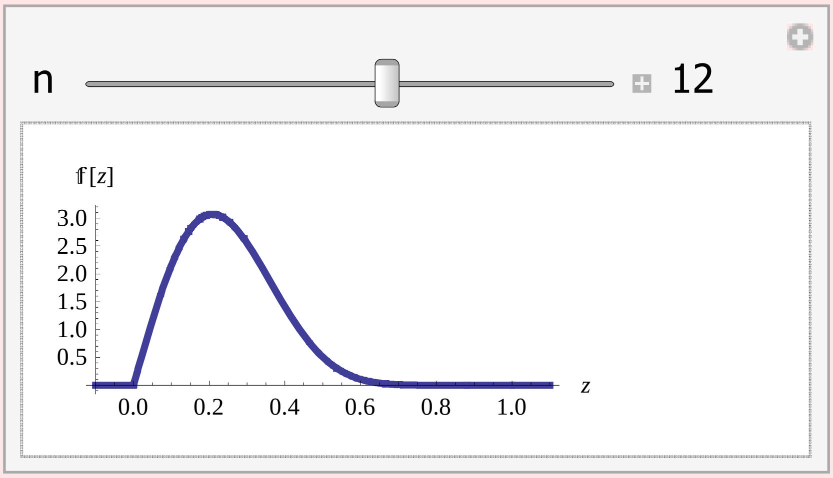
$$\mathbb{f}_Z[z] = \frac{1}{d z}\ \mathbb{P}[\{Z \in [z,\ z + d z]\}] = \begin{cases} 2\, n\, z\, (1 - z^2)^{n-1} & \text{für } 0 \le z \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

e) Wir geben diese "gestückelte" Verteilungsdichte wieder in der üblichen Weise in *Mathematica* ein

```
fs4[z_, n_] := Piecewise[{{2 n z (1 - z^2)^(n-1), 0 ≤ z ≤ 1}}]
```

und stellen diese Verteilungsdichte für beliebige Werte von n auf dynamische Weise graphisch dar:

```
Manipulate[Plot[fs4[z, n], {z, −0.1, 1.1},
    PlotStyle → Thickness[0.015], AspectRatio → 0.4, AxesOrigin → {−0.1, 0}, PlotRange → All,
    AxesLabel → {z, 𝕗[z]}, ImageSize → {200, 100}],
  {n, 1, 20, 1, Appearance → "Labeled"}]
```



f) Für die Wahrscheinlichkeit, dass der kleinste Abstand von $n = 6$ zufällig in den Einheitskreis geworfenen Punkten vom Mittelpunkt des Einheitskreises einen Wert zwischen $a = 0.2$ und $b = 0.6$ annimmt, also für die Wahrscheinlichkeit (man vergleiche dazu wieder Bemerkung 14.1.4)

$$\mathbb{P}[\{Z \in [a, b]\}] = \int_a^b \mathbb{f}_Z[z]\, dz$$

gilt damit

```
n = 6; a = 0.2; b = 0.6;
NIntegrate[fs4[z, n], {z, a, b}]
Clear[n, a, b]
```

```
0.714038
```

In diesen Fällen kann es sinnvoll sein, die Verteilungsdichte einer stetigen Zufallsvariablen durch Simulation näherungsweise zu ermitteln. Man erzeugt dazu eine genügend große Anzahl (vergleiche unsere Faustregel) von Realisierungen dieser Zufallsvariablen Z und ermittelt von diesem Datenmaterial daten unter Verwendung des Befehls ContinouosEmpiricalPDF die stetige empirische Verteilungsdichte.

Dazu wird $\mathbb{R}$ zuerst in geeigneter Weise in Intervalle $[z_i, z_{i+1}]$ der Länge dz eingeteilt. Für $z \in [z_i, z_{i+1}]$ verwendet man die relative Häufigkeit des Intervalls $[z_i, z_{i+1}]$ im Datenmaterial daten als Näherungswert für die unbekannte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{f}_Z[z]\, dz = \mathbb{P}[\{Z \in [z_i, z_{i+1}]\}]$. Bei der stetigen empirischen Verteilungsdichte

$$\hat{\mathbb{f}}_Z[z] = \frac{1}{dz} \text{ relative Häufigkeit des Intervalls } [z_i, z_{i+1}] \text{ mit } z \in [z_i, z_{i+1}] \text{ im Datenmaterial daten}$$

handelt es sich somit um eine gute Näherung für die gesuchte Verteilungsdichte der stetigen Zufallsvariablen Z, welche sich natürlich von Simulationslauf zu Simulationslauf geringfügig ändern wird.

■ ContinuousEmpiricalPDF[*daten*, dz, z]

zerlegt $\mathbb{R}$ in geeigneter Weise in Intervalle $[z_i, z_{i+1}]$ der Länge dz und ordnet jedem $z \in [z_i, z_{i+1}]$ die mit dem Faktor $1/dz$ multiplizierte relative Häufigkeit des Intervalls $[z_i, z_{i+1}]$ im Datenmaterial daten zu.

14.3.6 Beispiel: Aus dem Intervall [0, 1] werden zufällig drei Zahlen ausgewählt. Man ermittle die Verteilungsdichte $\mathbb{f}_Z$ ihrer Summe Z (man vergleiche dazu Beispiel 19.3.5).

▼