

§27 Stationäre stochastische Prozesse

27.1 Definition der Stationarität

Sei $\mathfrak{X} = \{X_t \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ ein stochastischer Prozess:

27.1.1 Definition:

a) \mathfrak{X} heißt **stark stationär**, wenn für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $\tau, t_1, t_2, \dots, t_k \in \mathbb{R}_+$ die gemeinsame Verteilung von $X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k}$ mit der gemeinsamen Verteilung von $X_{t_1+\tau}, X_{t_2+\tau}, \dots, X_{t_k+\tau}$ übereinstimmt.

b) \mathfrak{X} heißt **schwach stationär**, wenn alle X_t quadratisch integrierbar sind und für alle $s, t, \tau \in \mathbb{R}_+$ die beiden folgenden Beziehungen gelten:

i) $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_0]$

ii) $\mathbb{E}[X_{s+\tau} X_{t+\tau}] = \mathbb{E}[X_s X_t]$

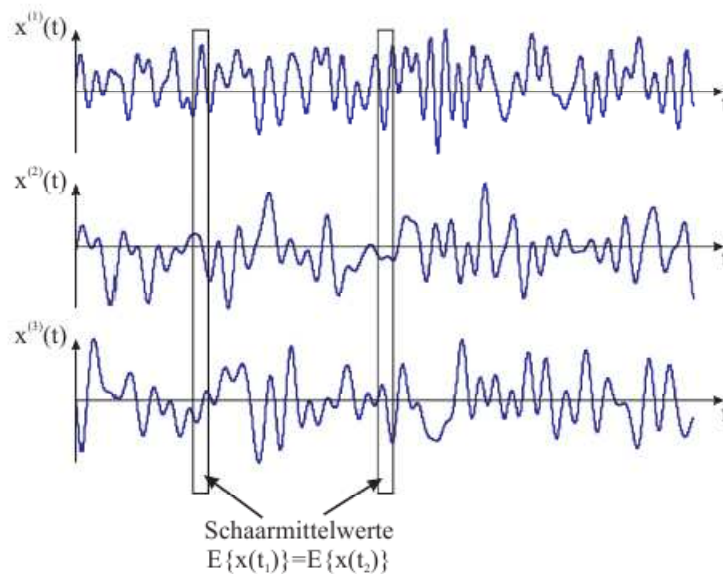
c) Ein schwach stationärer Prozess \mathfrak{X} heißt ergodisch, wenn die Ensemblemittel (Schaarmittel)

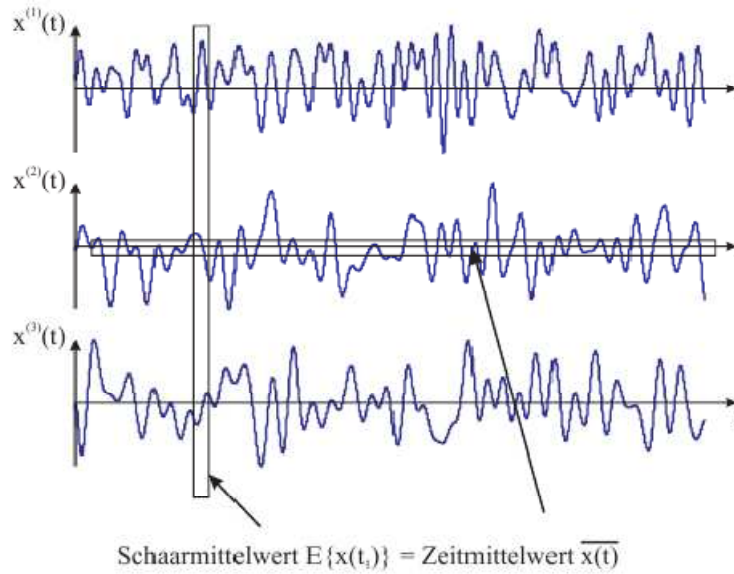
$$\mathbb{E}[X_0] \text{ und } \mathbb{E}[X_0 X_t]$$

für (fast alle ω) mit den Zeitmitteln

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X_\tau[\omega] d\tau \text{ und } \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X_\tau[\omega] X_{t+\tau}[\omega] d\tau$$

übereinstimmen.





27.1.2 Bemerkung:

- a) Ein stark stationärer Prozess muss nicht schwach stationär sein (etwa dann, wenn die Zufallsvariablen X_t nicht quadratisch integrierbar sind).
- b) Ein schwach stationärer Prozess muss nicht stark stationär sein (etwa dann, wenn die höheren Momente der Zufallsvariablen X_t von t abhängen).
- c) Ein stark stationärer Prozess mit der Eigenschaft $\mathbb{E}[X_0^2] < \infty$ ist schwach stationär und wegen des Ergodensatzes auch ergodisch.

Im Folgenden sei $\mathfrak{X} = \{X_t \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ stets ein schwach stationärer, ergodischer stochastischer Prozess mit der Eigenschaft

$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_0] = 0.$$

27.1.3 Definition: Die Abbildung $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$k[\tau] = \begin{cases} \mathbb{E}[X_0 X_\tau] & \text{für } \tau \geq 0 \\ \mathbb{E}[X_0 X_{-\tau}] & \text{für } \tau < 0 \end{cases}$$

heißt **Kovarianzfunktion** von \mathfrak{X} .

27.1.4 Satz: Die Kovarianzfunktion $k[\tau]$ besitzt die folgenden charakteristische Eigenschaften;

- a) $k[0] = \mathbb{E}[X_0 X_0] = \mathbb{V}[X_0]$
- b) $k[\tau]$ ist symmetrisch, für alle τ gilt also stets $k[-\tau] = k[\tau]$
- c) $k[\tau]$ ist positive semidefinit, für alle $n \in \mathbb{N}$, alle $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n \in \mathbb{R}_+$ und alle $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ gilt also stets

$$\sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^n x_m x_l k[\tau_m - \tau_l] \geq 0.$$



Beweis: Beweis von c): Für alle $n \in \mathbb{N}$, alle $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n \in \mathbb{R}_+$ und alle $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^n x_m x_l k[\tau_m - \tau_l] = \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^n x_m x_l \mathbb{E}[X_{\tau_m} X_{\tau_l}] = \mathbb{E}[(\sum_{m=1}^n x_m X_{\tau_m})(\sum_{l=1}^n x_l X_{\tau_l})] = \mathbb{E}[(\sum_{m=1}^n x_m X_{\tau_m})^2] \geq 0.$$

27.1.5 Beispiel: Ein Beispiel für einen schwach stationären ergodischen Prozess ist die Familie $\mathfrak{X}_1 = \{X_t \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ mit $X_t = A \cos[\alpha t + Z]$,

wobei Z eine im Intervall $[0, 2\pi]$ gleichverteilte Zufallsvariable ist und die Kreisfrequenz α größer 0 ist. Dieser Prozess besitzt die Kovarianzfunktion

$$k[\tau] = A^2 \text{Cos}[\alpha \tau]/2.$$

▼

Lösung: Für alle $t \in \mathbb{R}_+$ ist $\mathbb{E}[X_t] = 0$:

$$\text{Integrate}[A \text{Cos}[\alpha t + \omega], \{\omega, 0, 2\pi\}] / (2\pi)$$

0

Für alle $\omega \in [0, 2\pi]$ ist $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X_\tau[\omega] d\tau = 0$:

$$\text{Limit}[\text{Integrate}[A \text{Cos}[\alpha \tau + \omega], \{\tau, 0, T\}] / T, T \rightarrow \infty, \text{Assumptions} \rightarrow \{\alpha > 0\}]$$

0

Für alle $s, t \in \mathbb{R}_+$ ist $\mathbb{E}[X_s X_t] = A^2 \text{Cos}[\alpha(s-t)]/2$:

$$\text{Integrate}[A \text{Cos}[\alpha s + \omega] A \text{Cos}[\alpha t + \omega], \{\omega, 0, 2\pi\}] / (2\pi)$$

$\frac{1}{2}$

$$A^2 \text{Cos}[(s-t)\alpha]$$

2

Für alle $s, t \in \mathbb{R}_+$ und alle $\omega \in [0, 2\pi]$ ist $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X_{s+\tau}[\omega] X_{t+\tau}[\omega] d\tau = 0$:

$$\text{Limit}[\text{Integrate}[A \text{Cos}[\alpha(s+\tau) + \omega] A \text{Cos}[\alpha(t+\tau) + \omega], \{\tau, 0, T\}] / T,$$

$$T \rightarrow \infty, \text{Assumptions} \rightarrow \{\alpha > 0, s \in \text{Reals}, t \in \text{Reals}\}]$$

$\frac{1}{2}$

$$A^2 \text{Cos}[(s-t)\alpha]$$

2

Der Prozess \mathfrak{X}_1 besitzt damit die Kovarianzfunktion

$$k[\tau] = A^2 \text{Cos}[\alpha \tau]/2$$

27.1.6 Beispiel: Ein weiteres typisches Beispiel für einen schwach stationären ergodischen Prozess ist die Familie $\mathfrak{X}_2 = \{X_t | t \in \mathbb{R}_+\}$ mit

$$X_t = \sum_{i=1}^m A_i \text{Cos}[\alpha_i t + Z_i]$$

wobei Z_1, Z_2, \dots, Z_k paarweise unabhängige, im Intervall $[0, 2\pi]$ gleichverteilte Zufallsvariablen sind und alle Kreisfrequenzen α_i größer 0 sind. Dieser Prozess besitzt die Kovarianzfunktion

$$k[\tau] = \sum_{i=1}^m A_i^2 \text{Cos}[\alpha_i \tau]/2$$

▼

Lösung: Wir zeigen diese Aussage für den Spezialfall $m = 2$ und berücksichtigen die Ergebnisse von [Beispiel 27.1.5](#):

Für alle $t \in \mathbb{R}_+$ gilt $\mathbb{E}[X_t] = 0$:

$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[A_1 \text{Cos}[\alpha_1 t + Z_1] + A_2 \text{Cos}[\alpha_2 t + Z_2]] = 0.$$

Für alle $\omega \in [-\pi, \pi]$ gilt $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X_\tau[\omega] d\tau = 0$:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X_\tau[\omega] d\tau = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (A_1 \text{Cos}[\alpha_1 t + Z_1[\omega]] + A_2 \text{Cos}[\alpha_2 t + Z_2[\omega]]) d\tau = 0$$

Für alle $s, t, \tau \in \mathbb{R}_+$ gilt $\mathbb{E}[X_{s+\tau} X_{t+\tau}] = \sum_{i=1}^2 A_i^2 \text{Cos}[\alpha_i(s-t)]/2$:

Berücksichtigt man die Unabhängigkeit von Z_1 und Z_2 , so gilt offenbar

$$\mathbb{E}[X_{s+\tau} X_{t+\tau}] =$$

$$\mathbb{E}[(A_1 \text{Cos}[\alpha_1(s+\tau) + Z_1] + A_2 \text{Cos}[\alpha_2(s+\tau) + Z_2]) (A_1 \text{Cos}[\alpha_1(t+\tau) + Z_1] + A_2 \text{Cos}[\alpha_2(t+\tau) + Z_2])] =$$

$$= \mathbb{E}[A_1^2 \text{Cos}[\alpha_1(s+\tau) + Z_1] \text{Cos}[\alpha_1(t+\tau) + Z_1]] + \mathbb{E}[A_2^2 \text{Cos}[\alpha_2(s+\tau) + Z_2] \text{Cos}[\alpha_2(t+\tau) + Z_2]] +$$

$$\mathbb{E}[A_1 \text{Cos}[\alpha_1(s+\tau) + Z_1] A_2 \text{Cos}[\alpha_1(t+\tau) + Z_2]] + \mathbb{E}[A_2 \text{Cos}[\alpha_2(s+\tau) + Z_2] A_1 \text{Cos}[\alpha_1(t+\tau) + Z_1]] =$$

$$= A_1^2 \text{Cos}[\alpha_1(s - t)]/2 + A_2^2 \text{Cos}[\alpha_2(s - t)]/2$$

Für alle $s, t \in \mathbb{R}_+$ und alle $\omega \in [-\pi, \pi]$ gilt

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X_{s+\tau}[\omega] X_{t+\tau}[\omega] d\tau = \sum_{i=1}^2 A_i^2 \text{Cos}[\alpha_i(s - t)]/2:$$

Wegen

$$\left| \int_0^T \text{Cos}[\alpha_1(s + \tau) + Z_1[\omega]] \text{Cos}[\alpha_2(t + \tau) + Z_2[\omega]] d\tau \right| \leq \frac{1}{|\alpha_1 - \alpha_2|} + \frac{1}{|\alpha_1 + \alpha_2|}$$

```
Integrate[Cos[α1 (s + τ) + z1] Cos[α2 (t + τ) + z2], {τ, 0, T}] // FullSimplify
1
-----
2 (α1 - α2) (α1 + α2)
(- (α1 + α2) Sin[z1 - z2 + s α1 - t α2] + (-α1 + α2) Sin[z1 + z2 + s α1 + t α2] +
(α1 + α2) Sin[z1 - z2 + (s + T) α1 - (t + T) α2] +
(α1 - α2) Sin[z1 + z2 + (s + T) α1 + (t + T) α2])
```

gilt

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X_{s+\tau}[\omega] X_{t+\tau}[\omega] d\tau &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A_1^2 \text{Cos}[\alpha_1(s + \tau) + Z_1[\omega]] \text{Cos}[\alpha_1(t + \tau) + Z_1[\omega]] d\tau + \\ &\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A_2^2 \text{Cos}[\alpha_2(s + \tau) + Z_2[\omega]] \text{Cos}[\alpha_2(t + \tau) + Z_2[\omega]] d\tau + \\ &\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A_1 A_2 \text{Cos}[\alpha_1(s + \tau) + Z_1[\omega]] \text{Cos}[\alpha_2(t + \tau) + Z_2[\omega]] d\tau + \\ &\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A_1 A_2 \text{Cos}[\alpha_1(s + \tau) + Z_1[\omega]] \text{Cos}[\alpha_2(t + \tau) + Z_2[\omega]] d\tau = \\ &A_1^2 \text{Cos}[\alpha_1(s - t)]/2 + A_2^2 \text{Cos}[\alpha_2(s - t)]/2 \end{aligned}$$

Der Prozess \mathfrak{X}_2 besitzt damit die Kovarianzfunktion

$$k[\tau] = \sum_{i=1}^2 A_i^2 \text{Cos}[\alpha_i \tau]/2.$$

Wir betrachten einen schwach stationären ergodischen Prozess $\mathfrak{X} = \{X_t | t \in \mathbb{R}_+\}$, von dem ein Pfad zu den Zeitpunkten $\Delta t, 2 \Delta t, 3 \Delta t, \dots, n \Delta t$ abgetastet wurde. aus diesen Werten $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ lässt sich mit dem Befehl **Kov** die Kovarianzfunktion $k[\tau]$ dieses Prozesses an den Stellen $-[n/2] \Delta t, (-[n/2] + 1) \Delta t, \dots, [n/2] \Delta t$ näherungsweise ermitteln. Dieser Befehl nutzt dabei lediglich die Tatsache, dass für $\tau \geq 0$ wegen der Ergodizität offenbar

$$k[\tau] = \mathbb{E}[X_0 X_\tau] \approx \frac{1}{n-\tau} \sum_{i=1}^{n-\tau} x_i x_{i+\tau}$$

gilt.

```
Kov[pfad_] := Module[{n},
n = Length[pfad];
Table[
(Take[pfad, {1, n - Abs[τ]}].Take[pfad, {1 + Abs[τ], n}]) / (n - Abs[τ]), {τ, -[n/2], [n/2]}]]
```

27.1.7 Beispiel: Wir betrachten den schwach stationären ergodischen Prozesses $\mathfrak{X} = \{X_t | t \in \mathbb{R}_+\}$ mit $X_t = \text{Cos}[t + Z_1] + 2 \text{Cos}[2t + Z_2]$, wobei Z_1 und Z_2 unabhängige, im Intervall $[0, 2\pi]$ gleichverteilte Zufallsvariablen sind. Dieser Prozess besitzt wegen **Beispiel 27.1.6** die Kovarianzfunktion $k[\tau] = \text{Cos}[\tau]/2 + 2 \text{Cos}[2\tau]$. Wir tasten einen Pfad dieses Prozesses \mathfrak{X} zu den Zeitpunkten $\Delta t, 2 \Delta t, 3 \Delta t, \dots, n \Delta t$ ab und vergleichen die mit dem Befehl **Kov** ermittelten Werte mit den tatsächlichen Werten der Kovarianzfunktion $k[\tau]$ an den Stellen $-[n/2] \Delta t, (-[n/2] + 1) \Delta t, \dots, [n/2] \Delta t$.



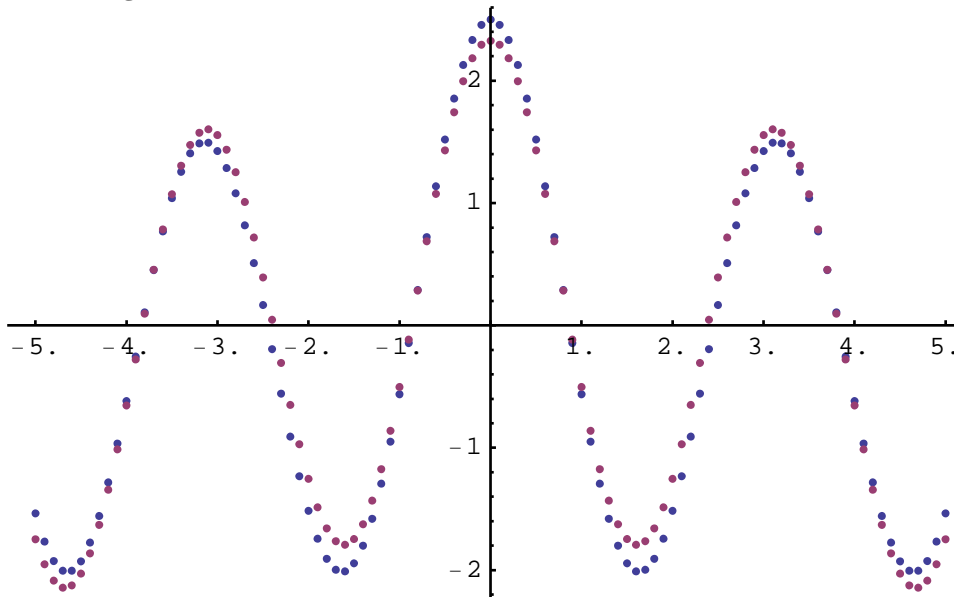
Lösung: Wir nehmen an, dass für unseren Pfad $Z_1[\omega] = z1$ und $Z_2[\omega] = z2$ gilt. Man erkennt dabei, dass – die **konkreten Werte z1 und z2 keinen einfluss** auf das Ergebnis haben;

- es notwendig ist, dass der Pfad über eine **genügend lange Strecke** abgetastet wurde, also $n\Delta t$ genügend groß ist;
- es **nicht notwendig ist**, Δt **besonders klein** zu machen.

```

z1 = 1; z2 = 3; Δt = 0.1; n = 100;
pfad = Table[Cos[t + z1] + 2 Cos[2 t + z2], {t, Δt, n Δt, Δt}];
kov = Table[Cos[τ] / 2 + 2 Cos[2 τ], {τ, -[n / 2] Δt, [n / 2] Δt, Δt}];
kovapp = Kov[pfad];
ListPlot[{kov, kovapp},
  Ticks → {Table[{[n / 2] + 1 + k / Δt, k], {k, -[n / 2] Δt, [n / 2] Δt}}, Automatic],
  AxesOrigin → {[n / 2] + 1, 0}]

```



27.2 Beispiel

Die Daten *DAX* (Deutscher Aktienindex) enthält 132 Beobachtungen von Jänner 1986 bis Dezember 1996. In nächster Abbildung werden die monatlichen Wertänderungen des *DAX* betrachtet (Zeitreihe *DAXD*). Wir prüfen, ob deutscher *DAX* bzw. *DAXD* als Pfad eines schwach stationären, ergodischen Prozesses mit diskreter Zeit angesehen werden kann und ermitteln die zugehörige Kovarianzfunktion.

Veranschaulichung der Daten:

```

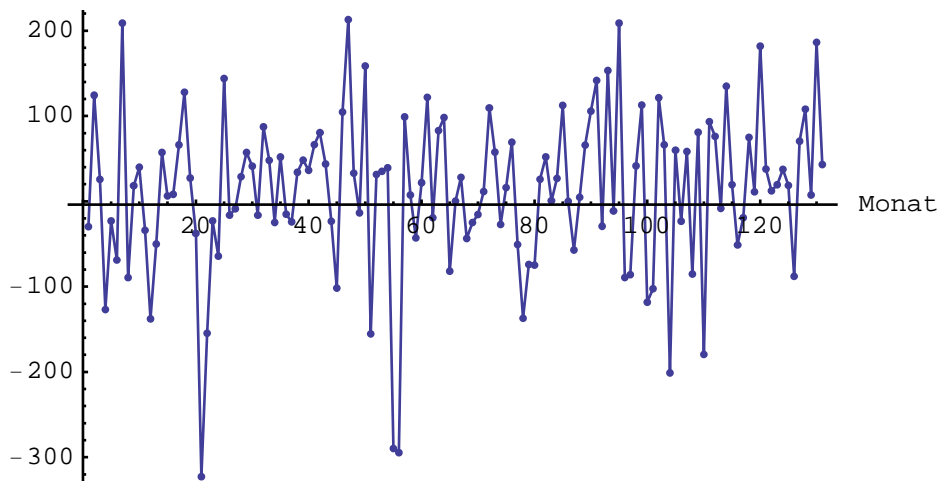
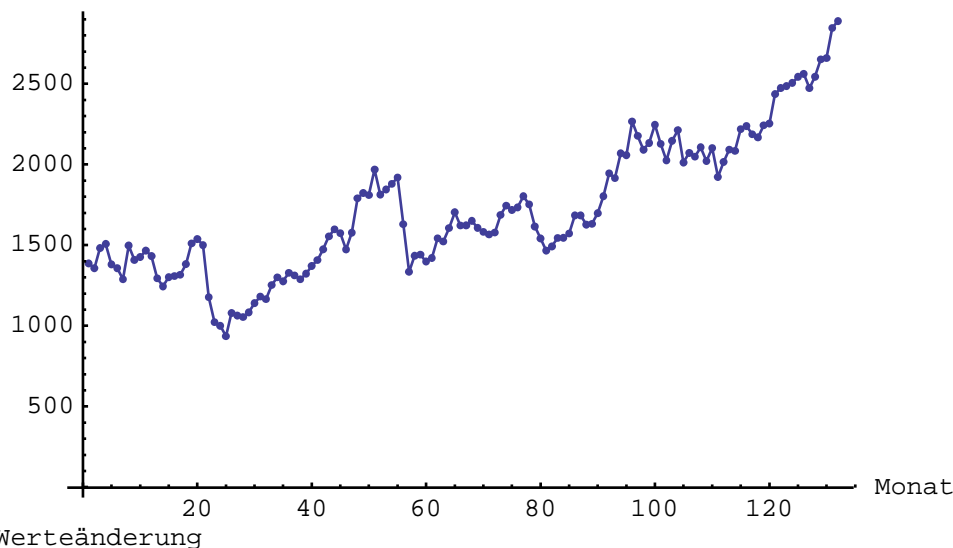
meinpfad = 
"E:\work\Lehre\Stochastische Prozesse\Stoch_Prozesse_SS2013\Wahrscheinlichkeitstheorie";
SetDirectory[meinpfad];
Needs["TimeSeries`TimeSeries`"]

```

```

DAXdata = Rest[Flatten[Import["dax.xls"]]];
p1 = ListPlot[DAXdata, PlotJoined → True,
  AxesLabel → {"Monat", "Aktienindex"}, AxesOrigin → {0, -4}];
p2 = ListPlot[DAXdata, PlotStyle → PointSize[0.01]];
DAXDdata = ListDifference[DAXdata, 1];
p3 = ListPlot[DAXDdata, PlotJoined → True,
  AxesLabel → {"Monat", "Werteänderung"}, AxesOrigin → {0, -4}];
p4 = ListPlot[DAXDdata, PlotStyle → PointSize[0.01]];
gr7 = Show[{p1, p2}]
gr8 = Show[{p3, p4}]
Aktienindex

```

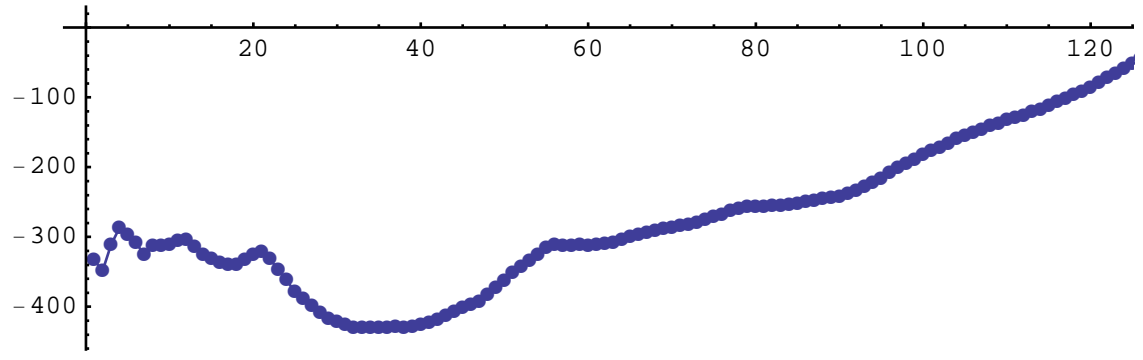
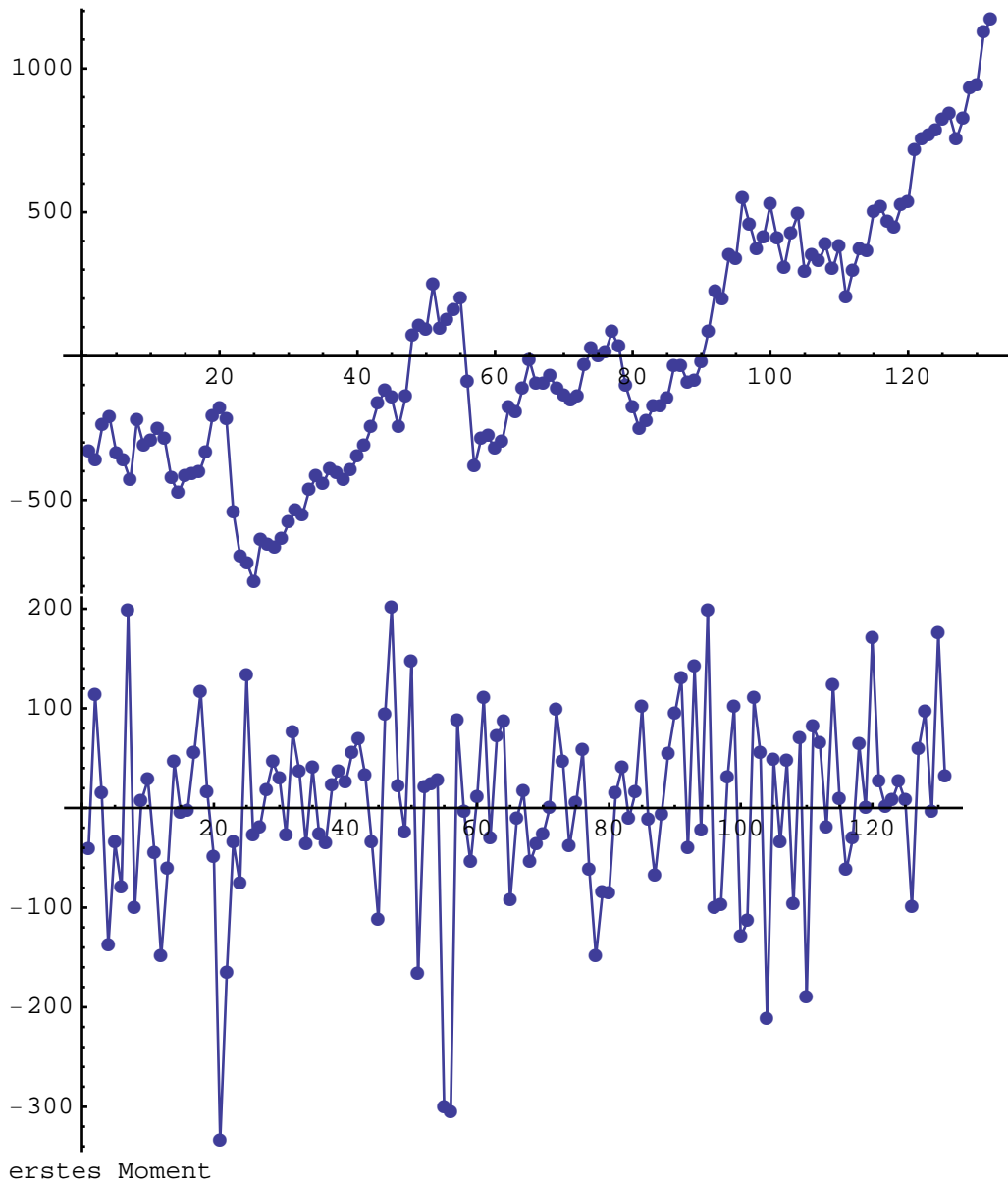


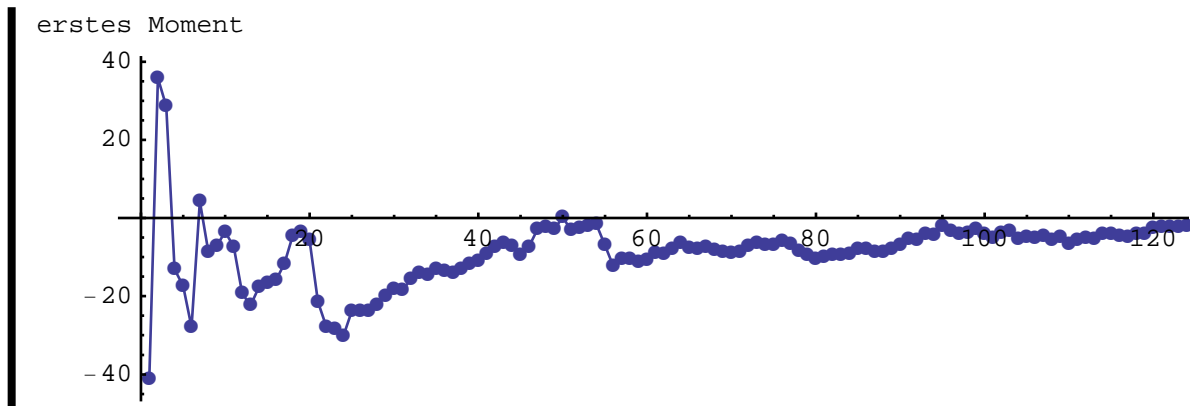
a) Wir prüfen, ob das erste Moment (Mittelwert) von DAX bzw DAXD die Ergodizitätsbedingung erfüllt

```

ListPlot[DAXdata - Mean[DAXdata], Joined → True, PlotMarkers → Automatic]
ListPlot[DAXDdata - Mean[DAXDdata], Joined → True, PlotMarkers → Automatic]
ListPlot[Table[Mean[Take[DAXdata - Mean[DAXdata], {1, k}]], {k, Length[DAXdata]}],
  Joined → True, AspectRatio → 0.3, ImageSize → {500, 150}, PlotRange → All,
  AxesLabel → {"Monat", "erstes Moment"}, PlotMarkers → Automatic]
ListPlot[Table[Mean[Take[DAXDdata - Mean[DAXDdata], {1, k}]], {k, Length[DAXDdata]}],
  Joined → True, AspectRatio → 0.3, ImageSize → {500, 150}, PlotRange → All,
  AxesLabel → {"Monat", "erstes Moment"}, PlotMarkers → Automatic]

```





b) Wir prüfen nun, ob das zweite Moment (Mittelwert der Quadrate) von DAX bzw DAXD die Ergodizitätsbedingung erfüllt (für $k \rightarrow \infty$ sollte das Zeitmittel der Quadrate gegen einen konstanten Wert konvergieren):

```
ListPlot[Table[Mean[Take[DAXdata - Mean[DAXdata], {1, k}]^2], {k, Length[DAXdata]}],
```

```
  Joined → True, AspectRatio → 0.3, ImageSize → {500, 150}, PlotRange → All,
```

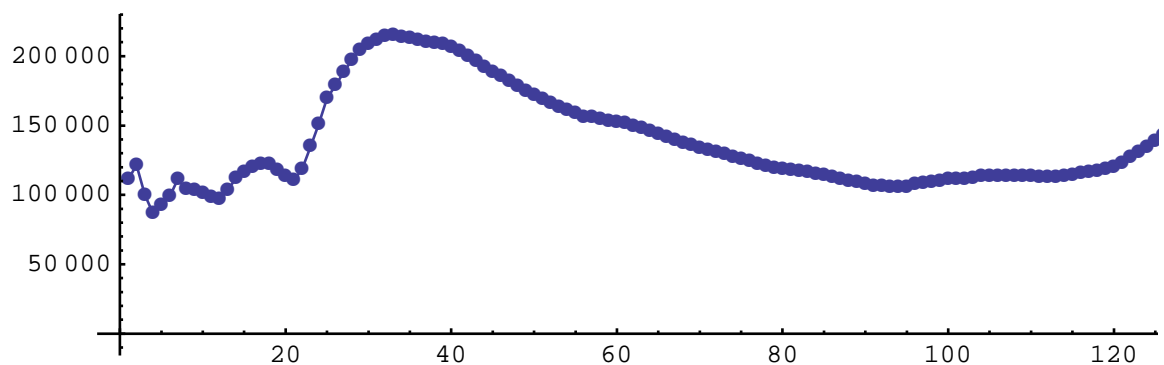
```
  AxesLabel → {"Monat", "zweites Moment"}, PlotMarkers → Automatic]
```

```
ListPlot[Table[Mean[Take[DAXDdata - Mean[DAXDdata], {1, k}]^2], {k, Length[DAXDdata]}],
```

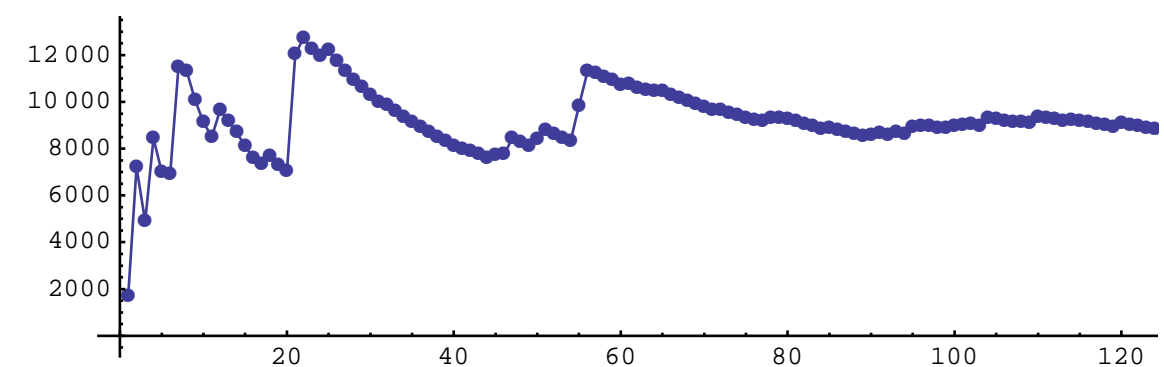
```
  Joined → True, AspectRatio → 0.3, ImageSize → {500, 150}, PlotRange → All,
```

```
  AxesLabel → {"Monat", "zweites Moment"}, PlotMarkers → Automatic]
```

zweites Moment



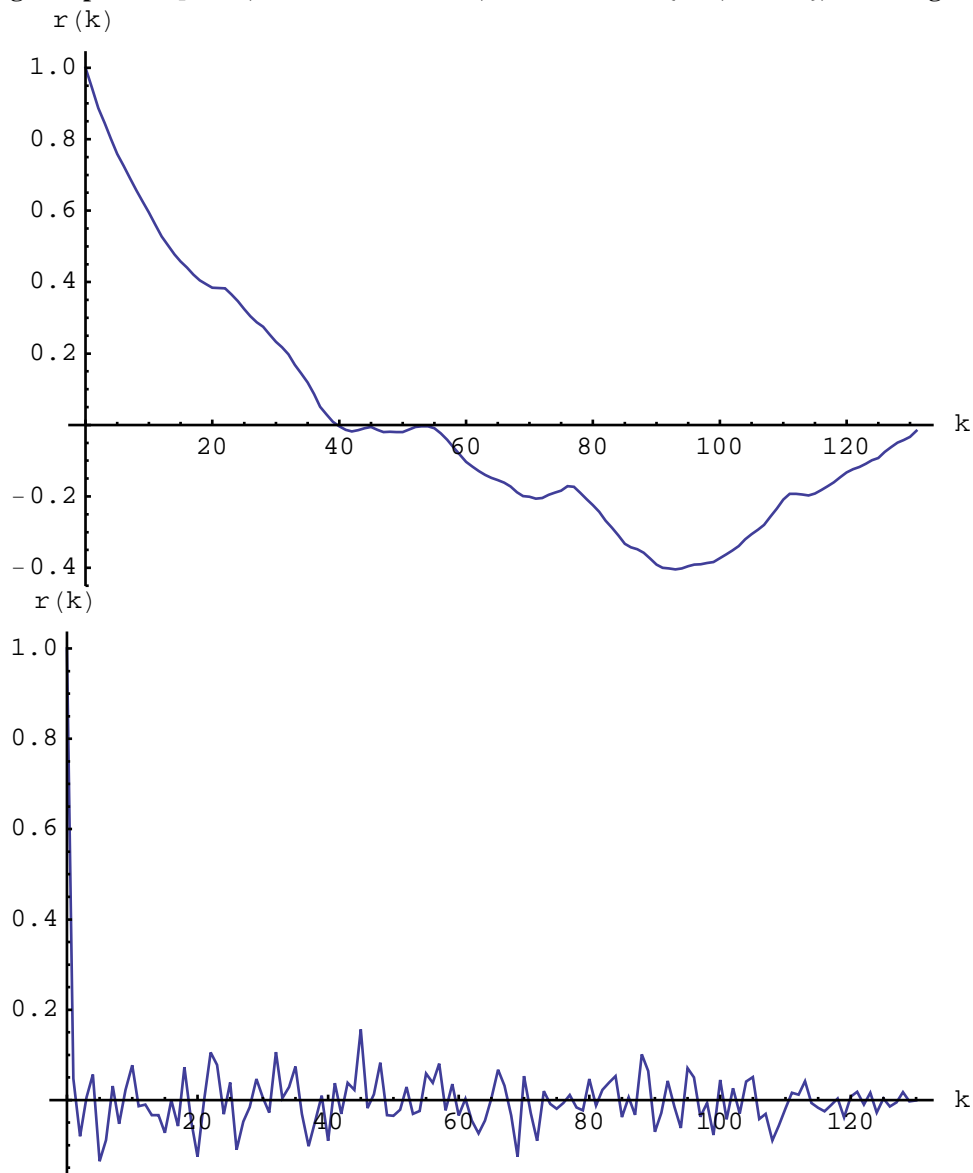
zweites Moment

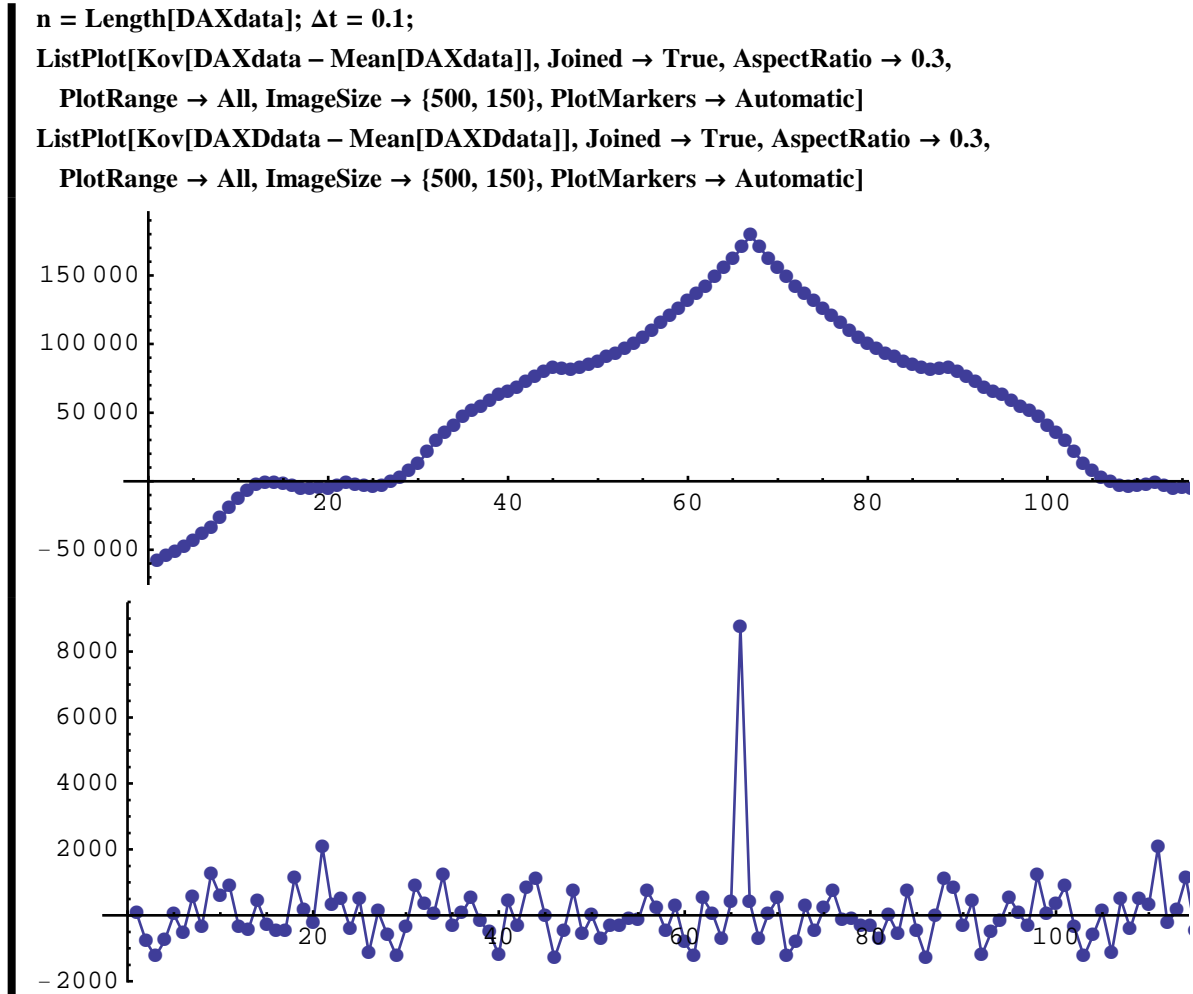


Wir erkennen, dass es sich bei DAX nicht um den Pfad eines stationären Prozess aber bei DAXD um den Pfad eines stationären Prozess handelt.

c) Wir ermitteln mit dem Befehl [CorrelationsFunction](#) die (Näherung) der Korrelationsfunktion für die Daten DAX bzw DAXD:


```
plotcorr[corr_, opts___] := ListPlot[Transpose[{Range[0, Length[corr] - 1], corr}], opts];  
corr = CorrelationFunction[DAXdata, Length[DAXdata] - 1];  
gr = plotcorr[corr, PlotJoined -> True, AxesLabel -> {"k", "r(k)"}, PlotRange -> All]  
corr2 = CorrelationFunction[DAXDdata, Length[DAXDdata] - 1];  
gr2 = plotcorr[corr2, PlotJoined -> True, AxesLabel -> {"k", "r(k)"}, PlotRange -> All]
```





27.3 Stetigkeit und Differenzierbarkeit schwach stationärer, ergodischer Prozesse

Abschließend befassen wir uns noch mit der Stetigkeit (im quadratischen Mittel) bzw der Differenzierbarkeit (im quadratischen Mittel) eines schwach stationären, ergodischen Prozesses $\mathfrak{X} = \{X_t \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ mit der Kovarianzfunktion $k[\tau]$:

27.3.1 Definition:

a) Der Prozess $\mathfrak{X} = \{X_t \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ heißt im Punkt $t_0 \in \mathbb{R}_+$ **stetig**, wenn gilt

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbb{E}[(X_t - X_{t_0})^2] = 0.$$

Der Prozess $\mathfrak{X} = \{X_t \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ heißt **stetig**, wenn er in allen Punkten $t_0 \in \mathbb{R}_+$ stetig ist.

b) Der Prozess $\mathfrak{X} = \{X_t \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ heißt im Punkt $t_0 \in \mathbb{R}_+$ **differenzierbar**, wenn eine quadratisch integrierbare Zufallsvariable X'_{t_0} existiert, für die gilt

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbb{E}\left[\left(\frac{X_t - X_{t_0}}{t - t_0} - X'_{t_0}\right)^2\right] = 0.$$

Diese Zufallsvariable X'_{t_0} ist dadurch fast sicher eindeutig bestimmt.

c) Ist der $\mathfrak{X} = \{X_t \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ in allen Punkten $t_0 \in \mathbb{R}_+$ **differenzierbar**, so nennt man den (offenbar ebenfalls schwach stationären ergodischen) Prozess $\mathfrak{X}' = \{X'_t \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ die **Ableitung** von \mathfrak{X} .

27.3.2 Bemerkung: Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass ein stetiger (differenzierbarer), schwach stationärer ergodischer stochastischer Prozess keineswegs lauter stetige (differenzierbare) Pfade besitzen muss.

27.3.3 Satz:

a) Der stochastischer Prozess $\mathfrak{X} = \{X_t \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ ist genau dann im quadratischen Mittel stetig, wenn seine Kovarianzfunktion $k[\tau]$ stetig ist.

b) Der stochastischer Prozess $\mathfrak{X} = \{X_t \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ ist genau dann im quadratischen Mittel differenzierbar, wenn seine Kovarianzfunktion $k[\tau]$ zweimal differenzierbar ist.

In diesem Fall besitzt die Ableitung \mathfrak{X}' des Prozesses \mathfrak{X} die Kovarianzfunktion $-k''[\tau]$.

▼

Beweis:

a) Für alle $\tau \in \mathbb{R}_+$ gilt wegen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung einerseits

$$\lim_{h \rightarrow 0} |k[\tau+h] - k[\tau]| = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \mathbb{E}[X_0(X_{\tau+h} - X_\tau)] \right| \leq \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{\mathbb{E}[X_0^2] \mathbb{E}[(X_{\tau+h} - X_\tau)^2]} = 0$$

und andererseits

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E}[(X_{\tau+h} - X_\tau)^2] = \lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E}[(X_{\tau+h} - X_\tau)(X_{\tau+h} - X_\tau)] \leq \lim_{h \rightarrow 0} (k[0] - 2k[h] + k[0]) = 0$$

b) Für alle $\tau \in \mathbb{R}_+$ gilt einerseits

$$k''[\tau] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k[\tau+2h] - 2k[\tau+h] + k[\tau]}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}[X_0 X_{\tau+2h}] - 2\mathbb{E}[X_0 X_{\tau+h}] + \mathbb{E}[X_0 X_\tau]}{h^2} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}[X_h(X_{\tau+h} - X_\tau)] - \mathbb{E}[X_0(X_{\tau+h} - X_\tau)]}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E}\left[\frac{X_h - X_0}{h} \frac{X_{\tau+h} - X_\tau}{h}\right] = \mathbb{E}[X'_0 X'_\tau]$$

und andererseits

$$\lim_{h,l \rightarrow 0} \mathbb{E}\left[\left(\frac{X_{\tau+h+l} - X_{\tau+h}}{l} - \frac{X_{h+l} - X_\tau}{h}\right)^2\right] =$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{k[0] - k[l] - k[-l] + k[0]}{l^2} - \lim_{h,l \rightarrow 0} \frac{2(k[l] - k[0] - k[h+l] - k[h])}{hl} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k[0] - k[h] - k[-h] + k[0]}{h^2} = -k''[0] + 2h''[0] - k''[0] = 0$$

womit gezeigt ist, dass es (Vollständigkeit des Raums der quadratisch integrierbaren Zufallsvariablen) eine quadratisch integrierbare Zufallsvariable X'_τ gibt, für die

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E}\left[\left(\frac{X_{h+l} - X_\tau}{h} - X'_\tau\right)^2\right] = 0$$

gilt.

27.4 Die Spektralzerlegung.

Sei $\mathfrak{X} = \{X_t \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ ein schwach stationärer, ergodischer Prozess mit $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_0] = 0$ und der Kovarianzfunktion $k[\tau]$ (man beachte, dass eine Kovarianzfunktion stets symmetrisch und positiv semidefinit ist).

27.4.1 Satz (Wiener, Bochner): Es existiert ein eindeutig bestimmtes Maß Φ auf \mathbb{R} mit den beiden Eigenschaften

a) Φ ist symmetrisch, das heißt, für alle $t > 0$ ist $\Phi[-t, 0] = \Phi[0, t]$;

b) Für alle $\tau \in \mathbb{T}$ gilt

$$k[\tau] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\varphi} \Phi[d\varphi]$$

das heißt, dass die Kovarianzfunktion $k[\tau]$ die Fouriertransformierte eines Masses Φ ist.

Man nennt dieses Maß Φ das Spektralmaß von \mathfrak{X} . Ist das Spektralmaß Φ diskret bzw stetig mit Träger \mathbb{T}_Φ , so nennt man die zugehörige Dichtefunktion f die Spektraldichte von \mathfrak{X} . Speziell gilt in diesem Fall für alle $\tau \in \mathbb{T}$

$$k[\tau] = \sum_{\varphi \in \mathbb{T}_\Phi} e^{i\tau\varphi} f[\varphi] \quad \text{bzw} \quad k[\tau] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\varphi} f[\varphi] d\varphi$$

▼

27.4.2 Bemerkung:

a) Da Φ symmetrisch ist, gilt für alle $\tau \in \mathbb{T}$

$$k[\tau] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\varphi} \Phi[d\varphi] = \int_0^{\infty} (e^{i\tau\varphi} + e^{-i\tau\varphi}) \Phi[d\varphi] = 2 \int_0^{\infty} \text{Cos}[\tau\varphi] \Phi[d\varphi]$$

b) Offenbar ist

$$\Phi[\mathbb{R}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i0\varphi} \Phi[d\varphi] = k[0].$$

27.4.3 Beispiel: Wir betrachten den Prozesses $\mathfrak{X} = \{X_t \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ mit

$$X_t = \text{Cos}[t + Z_1] + 2 \text{Cos}[2t + Z_2],$$

wobei Z_1 und Z_2 unabhängige, im Intervall $[0, 2\pi]$ gleichverteilte Zufallsvariablen sind. Gesucht ist das Spektralmaß Φ bzw die Spektraldichte f dieses Prozesses.

▼

Lösung: Die Korrelationsfunktion $k[\tau]$ unseres Prozesses \mathfrak{X} hat wegen [Beispiel 27.1.6](#) die Form

$$k[\tau] = \text{Cos}[\tau]/2 + 4 \text{Cos}[2\tau]/2.$$

Für das gesuchte Spektralmaß Φ muss somit gelten

$$2 \int_0^{\infty} \text{Cos}[\tau\varphi] \Phi[d\varphi] = \text{Cos}[\tau]/2 + 4 \text{Cos}[2\tau]/2$$

was auf Grund der Eindeutigkeit und der Symmetrie von Φ zur Folge hat, dass Φ diskret ist mit $\mathbb{T}_\Phi = \{\pm 1, \pm 2\}$ und der Spektraldichte

$$f[1] = f[-1] = 1/4 \text{ und } f[2] = f[-2] = 1$$

Oft möchte man die Spektraldichte f des schwachen stationären Prozesses $\mathfrak{X} = \{X_t \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ von dem ein Stück der Länge $T = n \Delta t$ eines speziellen Pfades zu den Zeitpunkten $\Delta t, 2 \Delta t, \dots, n \Delta t$ abgetastet wurde, näherungsweise ermitteln. aus diesen abgetasteten Werten

$$\text{pfad} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

lässt sich bekanntlich mit dem Befehl **Kov** die Kovarianzfunktion $k[\tau]$ dieses Prozesses

$$\text{kov} = \left\{ \bar{k}\left[-\left[\frac{n}{2}\right] \Delta t\right], \dots, \bar{k}[-\Delta t], \bar{k}[0], \dots, \bar{k}\left[\left[\frac{n}{2}\right] \Delta t\right] \right\}$$

an den Stellen

$$-\lceil n/2 \rceil \Delta t, (-\lceil n/2 \rceil + 1) \Delta t, \dots, \lfloor n/2 \rfloor \Delta t$$

näherungsweise ermitteln.

Wir werden nun zwei Möglichkeiten besprechen, mit denen sich die gesuchte Spektraldichte f dieses Prozesses

$$\text{psd} = \left\{ 2 f\left[\frac{1}{n \Delta t}\right], 2 f\left[\frac{2}{n \Delta t}\right], \dots, 2 f\left[\frac{\lfloor n/2 \rfloor}{n \Delta t}\right] \right\} = \left\{ 2 f\left[\frac{1}{T}\right], 2 f\left[\frac{2}{T}\right], \dots, 2 f\left[\frac{\lfloor n/2 \rfloor}{T}\right] \right\}$$

an den Stellen

$$\left\{ \frac{1}{n \Delta t}, \frac{2}{n \Delta t}, \dots, \frac{\lfloor n/2 \rfloor}{n \Delta t} \right\}$$

näherungsweise ermitteln lässt (da die Spektraldichte f bekanntlich symmetrisch ist, interessieren wir uns für die Werte $2f[\varphi]$ mit $\varphi > 0$ man spricht in diesem Zusammenhang auch von der **Power-Spektral-Dichte**).

Achtung: Ist das Spektralmaß Φ diskret, so gilt $\Phi[[\varphi, \varphi + d\varphi]] = f[\varphi]$; ist das Spektralmaß Φ stetig, so gilt $\Phi[[\varphi, \varphi + d\varphi]] = f[\varphi] d\varphi$. Wir haben daher zu unterscheiden, ob wir es mit einem Prozess mit diskretem oder stetigem Spektralmaß zu tun haben!

27.4.4 Satz:

I)

Besitzt der schwach stationäre ergodische Prozesse $\mathfrak{X} = \{X_t \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ ein diskretes Spektralmaß Φ , so gilt:

a) Ausgehend von den Werten

$$\text{pfa} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

eines konkreten Pfades des Prozesses \mathfrak{X} an den Stellen

$$\{\Delta t, 2 \Delta t, \dots, n \Delta t\}$$

lassen sich die Näherungswerte

$$\text{psddiskretedirekt} = \left\{ 2 \hat{f}\left[\frac{1}{T}\right], 2 \hat{f}\left[\frac{2}{T}\right], \dots, 2 \hat{f}\left[\frac{\lfloor n/2 \rfloor}{T}\right] \right\}$$

der (diskreten) Spektraldichte f von \mathfrak{X} mit Hilfe der Formel

$$2 \hat{f}\left[\frac{l}{T}\right] = \frac{2 \Delta t}{n T} \text{Abs} \left[\sum_{t=1}^n e^{-\frac{2 \pi i t l}{n}} x_t \right]^2$$

berechnen. Wendet man auf die Liste pfa den Befehl **PSDDiskretedirekt** an, so erhält man die Liste psddiskretedirekt.

b) Ausgehend von den Näherungswerten

$$\text{kov} = \{k_{-m}, \dots, k_{-1}, k_0, k_1, \dots, k_m\}$$

mit $m = \lfloor n/2 \rfloor$ der Kovarianzfunktion des Prozesses \mathfrak{X} an den Stellen

$$\{-m \Delta t, \dots, -\Delta t, 0, \Delta t, \dots, m \Delta t\}$$

lassen sich die Näherungswerte

$$\text{psddiskretindirekt} = \left\{ 2 \hat{f}\left[\frac{1}{T}\right], 2 \hat{f}\left[\frac{2}{T}\right], \dots, 2 \hat{f}\left[\frac{\lfloor n/2 \rfloor}{T}\right] \right\}$$

der (diskreten) Spektraldichte f von \mathfrak{X} mit Hilfe der Formel

$$2 \hat{f}\left[\frac{l}{T}\right] = \frac{2 \Delta t}{T} \text{Re} \left[\sum_{t=-m}^m e^{-\frac{2 \pi i t l}{n}} k_t \right]$$

berechnen. Wendet man auf die Liste kov den Befehl **PSDDiskretindirekt** an, so erhält man die Liste psddiskretindirekt.

II)

Besitzt der schwach stationäre ergodische Prozesse $\mathfrak{X} = \{X_t \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ ein stetiges Spektralmaß Φ , so gilt:

a) Ausgehend von den werten

$$\text{pfa} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

eines konkreten Pfades des Prozesses \mathfrak{X} an den Stellen

$$\{\Delta t, 2 \Delta t, \dots, n \Delta t\}$$

lassen sich die Näherungswerte

$$\text{psdstetigdirekt} = \left\{ 2 \hat{f}\left[\frac{1}{T}\right], 2 \hat{f}\left[\frac{2}{T}\right], \dots, 2 \hat{f}\left[\frac{\lfloor n/2 \rfloor}{T}\right] \right\}$$

der (stetigen) Spektraldichte f von \mathfrak{X} mit Hilfe der Formel

$$2 \hat{f}\left[\frac{l}{T}\right] = \frac{2\Delta t}{n} \text{Abs}\left[\sum_{t=1}^n e^{-\frac{2\pi i t l}{n}} x_t\right]^2$$

berechnen. Wendet man auf die Liste pfa den Befehl **PSDstetigdirekt** an, so erhält man die Liste psdstetigdirekt.

b) Ausgehend von den Näherungswerten

$$\text{kov} = \{k_{-m}, \dots, k_{-1}, k_0, k_1, \dots, k_m\}$$

mit $m = \lfloor n/2 \rfloor$ der Kovarianzfunktion des Prozesses \mathfrak{X} an den Stellen

$$\{-m \Delta t, \dots, -\Delta t, 0, \Delta t, \dots, m \Delta t\}$$

lassen sich die Näherungswerte

$$\text{psdstetigindirekt} = \left\{2 \hat{f}\left[\frac{1}{T}\right], 2 \hat{f}\left[\frac{2}{T}\right], \dots, 2 \hat{f}\left[\frac{\lfloor n/2 \rfloor}{T}\right]\right\}$$

der (stetigen) Spektraldichte f von \mathfrak{X} mit Hilfe der Formel

$$2 \hat{f}\left[\frac{l}{T}\right] = 2 \Delta t \text{Re}\left[\sum_{t=-m}^m e^{-\frac{2\pi i t l}{n}} k_t\right]$$

berechnen. Wendet man auf die Liste kov den Befehl **PSDstetigindirekt** an, so erhält man die Liste psdstetigindirekt.

▼

```
PSDdiskretdirekt[pfad_, Δt_] := Module[{n, m, T},
```

```
  n = Length[pfad];
```

```
  m = Floor[n / 2] + 1;
```

```
  T = n Δt;
```

```
  2 Δt / (n T) Take[Abs[Fourier[pfad, FourierParameters → {1, -1}]]^2, {2, m}]]
```

```
PSDstetigdirekt[pfad_, Δt_] := T PSDdiskretdirekt[pfad, Δt]
```

```
PSDdiskretindirekt[kov_, Δt_] := Module[{n, m, T},
```

```
  n = Length[kov];
```

```
  m = Floor[n / 2] + 1;
```

```
  T = n Δt;
```

```
  2 Δt / T
```

```
  Take[Re[Fourier[Join[Take[kov, -m], Take[kov, m - 1]], FourierParameters → {1, -1}]],
```

```
  {2, m}]]
```

```
PSDstetigindirekt[pfad_, Δt_] := T PSDdiskretindirekt[pfad, Δt]
```

27.4.5 Beispiel: Wir betrachten den Prozess $\mathfrak{X} = \{X_t \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ mit

$$X_t = \cos[t + Z_1] + 2 \cos[2t + Z_2],$$

wobei Z_1 und Z_2 unabhängige, im Intervall $[0, 2\pi]$ gleichverteilte Zufallsvariablen sind. Wir tasten den durch $Z_1 = z_1$ und $Z_2 = z_2$ bestimmten konkreten Pfad dieses Prozesses zu den Zeitpunkten $\Delta t, 2\Delta t, \dots, n\Delta t$ ab und ermitteln sowohl direkt als auch indirekt Näherungswerte für die diskrete Power-spektral-Dichte dieses Prozesses.

▼

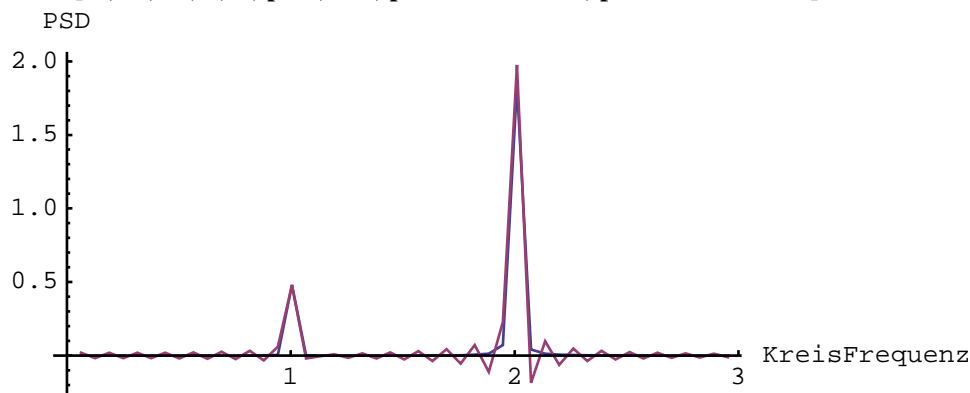
Lösung: Diese Prozess \mathfrak{X} besitzt bekanntlich (vgl. [Beispiel 27.4.3](#)) ein auf $\{-2, -1, 1, 2\}$ konzentriertes diskretes Spektralmaß Φ mit der Spektraldichte $f[1] = f[-1] = 1/4$ und $f[2] = f[-2] = 1$.

Wir ermitteln nun die diskrete Power-Spektral-Dichte, indem wir den durch $Z_1 = z_1$ und $Z_2 = z_2$ bestimmten konkreten Pfad dieses Prozesses zu den Zeitpunkten $\Delta t, 2\Delta t, \dots, n\Delta t$ abtasten und darauf die Befehle **PSDdiskretdirekt** und **PSDdiskretindirekt** anwenden:

```

Kov[pfad_] := Module[{n},
  n = Length[pfad];
  Table[
    (Take[pfad, {1, n - Abs[τ]}.Take[pfad, {1 + Abs[τ], n}]) / (n - Abs[τ]), {τ, -[n/2], [n/2]}]]
z1 = 1; z2 = 2; Δt = 0.2; n = 500; T = n Δt;
pfad = Table[Cos[t Δt + z1] + 2 Cos[2 t Δt + z2], {t, 1, n}];
kov = Kov[pfad];
psddiskretdirekt = PSDdiskretdirekt[pfad, Δt];
psddiskretindirekt = PSDdiskretindirekt[kov, Δt];
ListPlot[
  {Take[psddiskretdirekt, Floor[3 T / (2 Pi)]], Take[psddiskretindirekt, Floor[3 T / (2 Pi)]]},
  Joined → True, PlotRange → All, AspectRatio → 0.5,
  Ticks → {Table[{1 T / (2 Pi), 1}, {1, 1, 3}], Automatic}, AxesLabel → {"Kreisfrequenz", "PSD"}]
Clear[z1, z2, Δt, n, T, pfad, kov, psddiskretdirekt, psddiskretindirekt]

```



Wir erkennen, dass in beiden Fällen die diskrete Power-Spektral-Dichte gut approximiert wird, wobei diese Approximation umso besser wird, je grösser die Länge $T = n \Delta t$ des abgetasteten Bereiches ist (verkleinert man bei gleichem n den Wert von Δt , so verschlechtert sich die Güte der Approximation!). Man erkennt auch, dass die indirekte Berechnung zum Teil negative Dichtewerte liefert. Dies rührt von der Tatsache her, dass die Näherungswerte der Kovarianzfunktion nicht positiv semidefinit sind. Wir werden daher in Zukunft stets die diskrete Berechnung der Power-Spektral-Dichte verwenden.

Der Einfachheit halber bezeichnen wir den Befehl **PSDstetigdirekt** mit **PSD**:

```

PSD[pfad_, Δt_] := Module[{n, m},
  n = Length[pfad];
  m = Floor[n / 2] + 1;
  2 Δt / n Take[Abs[Fourier[pfad, FourierParameters → {1, -1}]]^2, {2, m}]]

```

27.4.6 Satz: Ist $\mathfrak{X} = \{X_t \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ ein schwach stationärer, ergodischer stochastischer Prozess mit $\mathbb{E}[X_0] = 0$ und Spektralmaß Φ , so existiert ein bis auf eine additive konstante Zufallsvariable eindeutig bestimmter komplexwertiger stochastischer Prozess $\mathfrak{Z} = \{Z[\varphi] \mid \varphi \in \mathbb{R}\}$ mit paarweise unkorrelierten Zuwächsen und den Eigenschaften $\mathbb{E}[Z[\varphi]] = 0$ und $\mathbb{E}[|Z[\varphi + d\varphi] - Z[\varphi]|^2] = \Phi[[\varphi, \varphi + d\varphi]]$, sodass für alle $t \in \mathbb{T}$

$$X_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i t \varphi} Z[d\varphi]$$

gilt, wobei dieses Integral als stochastisches Integral zu verstehen ist. Man spricht in diesem Zusammenhang von der **Spektraldarstellung von \mathfrak{X}** .

▼

27.4.7 Beispiel: Wir betrachten den Prozess $\mathfrak{X} = \{X_t \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ mit

$$X_t = \cos[t + Z_1] + 2 \cos[2t + Z_2],$$

wobei Z_1 und Z_2 unabhängige, im Intervall $[0, 2\pi]$ gleichverteilte Zufallsvariablen sind. Man zeige, dass dieser Prozess die Spektraldarstellung

$$X_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\varphi} Z[d\varphi]$$

mit

$$Z[\varphi] = \frac{1}{2} \begin{cases} 0 & \text{für } \varphi \in]-\infty, -2[\\ 2e^{-iZ_2} & \text{für } \varphi \in [-2, -1[\\ 2e^{-iZ_2} + 1e^{-iZ_1} & \text{für } \varphi \in [-1, 1[\\ 2e^{-iZ_2} + 1e^{-iZ_1} + 1e^{iZ_1} & \text{für } \varphi \in [1, 2[\\ 2e^{-iZ_2} + 1e^{-iZ_1} + 1e^{iZ_1} + 2e^{iZ_2} & \text{für } \varphi \in [2, \infty[\end{cases}$$

besitzt.

▼

Lösung:

a) Wir zeigen, dass der Prozess $\mathfrak{X} = \{Z[\varphi] \mid \varphi \in \mathbb{R}\}$ paarweise unkorrelierte Zuwächse besitzt (unkorreliert heißt bei komplexen Zufallsvariablen X_1 und X_2 , dass $\mathbb{E}[X_1 \bar{X}_2] = \mathbb{E}[X_1] \mathbb{E}[\bar{X}_2]$ gilt): Dies folgt unmittelbar aus der Unabhängigkeit der beiden Zufallsvariablen Z_1 und Z_2 sowie aus der Tatsache

$$\mathbb{E}[e^{-iZ_1}] \mathbb{E}[e^{iZ_1}] = \mathbb{E}[e^{-2iZ_1}] = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \text{Integrate}[\text{Exp}[-2Iz], \{z, 0, 2\pi\}] dz = 0$$

b) Für $\varphi = \pm 1, \pm 2$ gilt (der Prozess \mathfrak{X} besitzt das in [Beispiel 27.4.3](#) behandelte diskrete Spektralmaß)

$$\mathbb{E}[\text{Abs}[Z[\varphi + d\varphi] - Z[\varphi]]^2] = Z[\varphi] = \begin{cases} 1/4 & \text{für } \varphi = \pm 1 \\ 1 & \text{für } \varphi = \pm 2 \end{cases} = f[\varphi] = \Phi[[\varphi, \varphi + d\varphi]]$$

c) Für alle $t \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\varphi} Z[d\varphi] = e^{-it^2} e^{-iZ_2} + \frac{1}{2} e^{-it} e^{-iZ_1} + \frac{1}{2} e^{it} e^{iZ_1} + e^{it^2} e^{iZ_2} = \text{Cos}[t + Z_1] + 2 \text{Cos}[2t + Z_2]$$

27.4.8 Bemerkung: Falls $\mathfrak{X} = \{X_t \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ den zufälligen Spannungsverlauf (Volt) zu den Zeitpunkten $t \in \mathbb{R}_+$ beschreibt, so lässt sich dieser Spannungsverlauf als Überlagerung von unabhängigen Schwingungen der Form $A[\varphi] \text{Cos}[\varphi t + \alpha[\varphi]]$ mit

$$A[\varphi] = 2 \text{Abs}[Z[\varphi + d\varphi] - Z[\varphi]] \quad \text{und} \quad \alpha[\varphi] = \text{Arg}[Z[\varphi + d\varphi] - Z[\varphi]]$$

darstellen. Für die mittlere Leistung $P[\varphi]$ (Watt), welche durch eine Schwingung der Form $A[\varphi] \text{Cos}[\varphi t + \alpha[\varphi]]$ an einem Ohm'schen Widerstand von 1Ω in einem Zeitintervall der Länge 1 abgegeben wird, gilt daher

$$P[\varphi] = \mathbb{E}[A[\varphi]^2 / 2] = 2 \mathbb{E}[\text{Abs}[Z[\varphi + d\varphi] - Z[\varphi]]^2] = 2 \Phi[[\varphi, \varphi + d\varphi]].$$

Ist Φ stetig bzw. diskret, so gilt für alle $\varphi \in \mathbb{T}_\Phi$

$$P[\varphi] = \mathbb{E}[A[\varphi]^2 / 2] = 2 f[\varphi] d\varphi \quad \text{bzw.} \quad P[\varphi] = \mathbb{E}[A[\varphi]^2 / 2] = 2 f[\varphi]$$

Man nennt deshalb $2f$ auch die **Power-Spektral-Dichte** (kurz **PSD**) von \mathfrak{X} . Die PSD enthält somit lediglich Informationen über den Erwartungswert von $A[\varphi]^2$. Darüber hinaus enthält sie aber weder Informationen über die Art der Verteilung der Amplituden $A[\varphi]$ noch die Art der Verteilung der Phasen $\alpha[\varphi]$.

(Der Faktor 2 rührt daher, dass wir nur Schwingungen mit $\varphi > 0$ betrachten).

27.4.9 Beispiel: Wir nehmen an, dass sich beim DAXD um einen Pfad eines schwach stationären, ergodischen Prozess mit stetigem Spektralmaß Φ handelt.

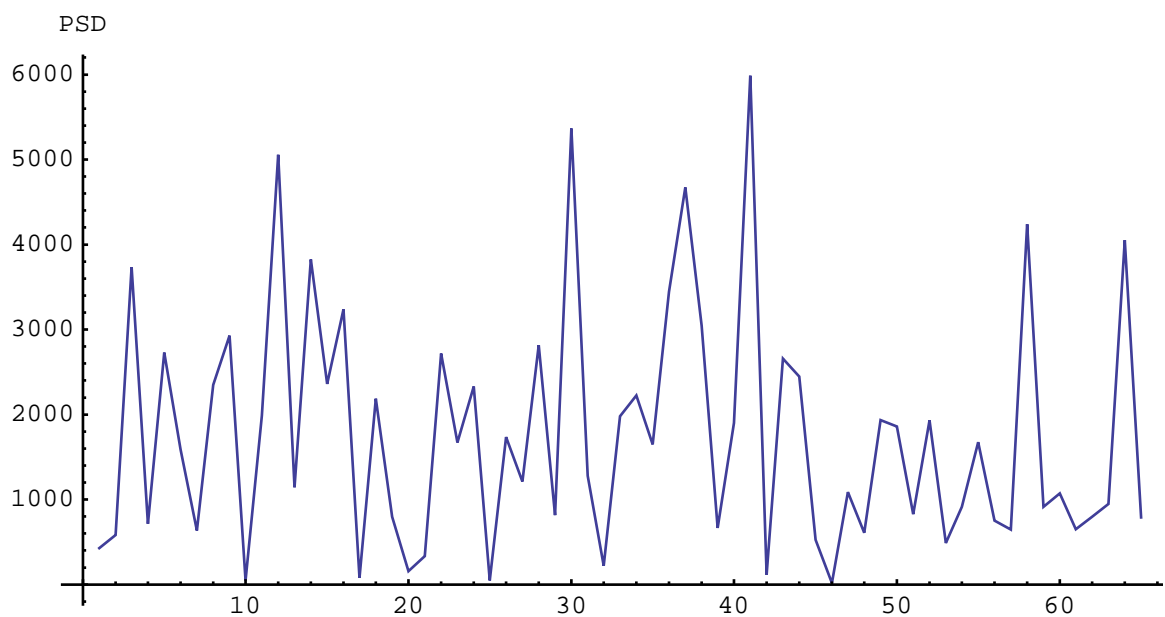
▼

Lösung:

```
n = Length[DAXDdata]; Δt = 0.1; Tmax = Floor[Δt n]; m = Floor[n / 2];
Tmax
Length[PSD[DAXDdata, Δt]]
Kov[DAXDdata - Mean[DAXDdata]];
13
65
```

Ausgehend von diesem Pfad berechnen wir mit dem Befehl PSD die Power-Spektral-Dichte dieses Prozesses. Anschließend zeichnen wir diese Power-Spektral-Dichte für die Wellenzahlen $w \leq w_{\max}$ (Unter der Wellenzahl versteht man die Anzahl der Schwingungen pro Meter).

```
wmax = 5;
ListPlot[Take[PSD[DAXDdata, Δt], {1, Tmax wmax}], Joined → True, ImageSize → {500, 250},
PlotRange → All, AspectRatio → 0.5, AxesLabel → {"Wellenzahl", "PSD"}]
```



27.5 Momente der Spektraldichte

Sei $\mathfrak{X} = \{X_t \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ ein schwach stationärer, ergodischer stochastischer Prozess mit $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_0] = 0$, der Kovarianzfunktion $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und dem Spektralmaß Φ .

27.5.1 Satz:

a) Das 0-te Moment des Spektralmaßes Φ entspricht wegen

$$m_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i0\varphi} \Phi[d\varphi] = k[0] = \mathbb{V}[X_0] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\infty} X_{\tau}[\omega]^2 d\tau$$

der Varianz $[\text{mm}^2]$ des Zeitsignals und damit für fast alle ω der Varianz des Pfades $t \rightarrow X_t[\omega]$.

b) Das 2-te Moment des Spektralmaßes Φ entspricht wegen

$$m_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2 \Phi[d\varphi] = -\frac{d^2}{d\tau^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\varphi} \Phi[d\varphi] |_{\tau=0} = -k''[0] = \mathbb{V}[X_0'] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\infty} X_{\tau}'[\omega]^2 d\tau$$

der Varianz der Geschwindigkeit $[\text{mm}^2/\text{sek}^2]$ des Zeitsignals und damit für fast alle ω der Varianz des Pfades $t \rightarrow X_t'[\omega]$.

c) Das 4-te Moment des Spektralmaßes Φ entspricht wegen

$$m_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^4 \Phi[d\varphi] = \frac{d^4}{d\tau^4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\varphi} \Phi[d\varphi] |_{\tau=0} = k''''[0] = \mathbb{V}[X_0''] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\infty} X_{\tau}''[\omega]^2 d\tau$$

der Varianz der Beschleunigung des Zeitsignals $[\text{mm}^2/\text{sek}^4]$ und damit für fast alle ω der Varianz des Pfades $t \rightarrow X_t''[\omega]$.



Dieser Satz ist deshalb von Bedeutung, da die Größen $-k''[0]$ und $k''''[0]$ bzw. $\mathbb{V}[X_0']$ und $\mathbb{V}[X_0'']$ auf direktem Weg in vielen Fällen nicht ermittelt werden können.

27.5.2 Beispiel: Wir betrachten den Prozess $\mathfrak{X} = \{X_t \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ mit

$$X_t = \text{Cos}[t + Z_1] + 2 \text{Cos}[2t + Z_2],$$

wobei Z_1 und Z_2 unabhängige, im Intervall $[0, 2\pi]$ gleichverteilte Zufallsvariablen sind. Man zeige die Gültigkeit der oben angeführten Formeln.



Lösung: Die Kovarianzfunktion $k[\tau]$ unseres Prozesses \mathfrak{X} hat wegen [Beispiel 27.1.6](#) die Form

$$k[\tau] = \text{Cos}[\tau]/2 + 4 \text{Cos}[2\tau]/2.$$

Das gesuchte Spektralmaß Φ ist diskret mit $\mathbb{T}_{\Phi} = \{\pm 1, \pm 2\}$ und der Spektraldichte $f[1] = f[-1] = 1/4$ und $f[2] = f[-2] = 1$.

$\alpha)$ Wir ermitteln die Werte m_0 , $k[0]$ und $\mathbb{V}[X_0]$:

```
m0 = 1 + 1/4 + 1/4 + 1;
k0 = Cos[τ]/2 + 4 Cos[2τ]/2 /. τ -> 0;
v0 = Limit[Integrate[(Cos[t + z1] + 2 Cos[2t + z2])^2, {t, 0, T}]/T, T -> ∞];
```

```
Print["m0=", m0]
```

```
Print["k[0]=", k0]
```

```
Print["V[X0]=", v0]
```

```
Clear[m0, k0, v0, T]
```

$$m_0 = \frac{5}{2}$$

$$k[0] = \frac{5}{2}$$

$$\mathbb{V}[X_0] = \frac{5}{2}$$

$\beta)$ Wir ermitteln die Werte m_2 , $-k''[0]$ und $\mathbb{V}[X_0']$:

```

m2 = (-2)^2 1 + (-1)^2 1 / 4 + 1^2 1 / 4 + 2^2 1;
k2 = -D[Cos[τ] / 2 + 4 Cos[2 τ] / 2, {τ, 2}] /. τ → 0;
v2 = Limit[Integrate[(D[Cos[t + z1] + 2 Cos[2 t + z2], t])^2, {t, 0, T}] / T, T → ∞];
Print["m2=", m2]
Print["-k''[0]=", k2]
Print["V[X0']=", v2]
Clear[m2, k2, v2, T]
m2 = 17
2
-k''[0] = 17
2
V[X0'] = 17
2

```

γ) Wir ermitteln die Werte m_4 , $k''''[0]$ und $V[X_0'']$:

```

m4 = (-2)^4 1 + (-1)^4 1 / 4 + 1^4 1 / 4 + 2^4 1;
k4 = -D[Cos[τ] / 2 + 4 Cos[2 τ] / 2, {τ, 4}] /. τ → 0;
v4 = Limit[Integrate[(D[Cos[t + z1] + 2 Cos[2 t + z2], {t, 2})]^2, {t, 0, T}] / T, T → ∞];
Print["m4=", m4]
Print["k''''[0]=", k4]
Print["V[X0'']=", v4]
Clear[m4, k4, v4, T]
m4 = 65
2
k''''[0] = -65
2
V[X0''] = 65
2

```

27.5.3 Beispiel: Wir ermitteln die Werte m_0 , m_2 , m_4 , $k[0]$ und $V[X_0]$ für Daten DAXD.

▼

Lösung:

α) Die Werte m_0 , $k[0]$ und $V[X_0]$ für Daten DAXD. Diese drei Werte stimmen tatsächlich sehr gut überein:

```

kDAXDdata = Kov[DAXDdata - Mean[DAXDdata]];
m0 = PSD[DAXDdata - Mean[DAXDdata], Δt].Table[1, {i, 1, m}] / Tmax;
k0 = kDAXDdata[[m + 1]];
v0 = Mean[(DAXDdata - Mean[DAXDdata])^2];
Print["m0=", m0]
Print["k[0]=", k0]
Print["V[X0]=", v0]
Clear[k0, v0, T]
m0 = 8817.16
k[0] = 8749.85
V[X0] = 8749.85

```

β) Wir ermitteln die Werte m_2 und m_4 :

```

m2 = PSD[DAXDdata - Mean[DAXDdata], Δt].Table[(i / Tmax)2, {i, 1, m}] / Tmax;
m4 = PSD[DAXDdata - Mean[DAXDdata], Δt].Table[(i / Tmax)4, {i, 1, m}] / Tmax;
Print["m2=", m2]
Print["m4=", m4]
m2=68 944 . 1
m4=991 735 .

```

27.6 Weiter statistische Kennzahlen

Mit diesen Momenten m_0 , m_2 und m_4 des Spektralmaßes Φ lassen sich interessante statistische Kennzahlen des schwach stationären, ergodischen Prozesses $\mathfrak{X} = \{X_t \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ mit $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_0] = 0$ ermitteln. Wir gehen die entsprechenden formeln ohne Beweis an:

27.6.1 Satz: Für den schwach stationären, ergodischen Prozess \mathfrak{X} mit $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_0] = 0$, Kovarianzfunktion $k[\tau]$ und Spektralmaß Φ gilt

a) Für die mittlere Anzahl der positiven Nulldurchgänge pro Sekunde ν_0 der Pfade des Prozesses \mathfrak{X} gilt

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{m_2/m_0}$$

b) Für die mittlere Anzahl der lokalen Maxima pro Sekunde ν_p der Pfade des Prozesses \mathfrak{X} gilt

$$\nu_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{m_4/m_2}$$

c) Für die Breitbandigkeit α des Prozesses \mathfrak{X} gilt

$$\alpha = \nu_0 / \nu_p = \frac{m_2}{\sqrt{m_0 m_4}}$$

Für einen idealen Schmalbandprozess ist $\alpha = 1$, für einen idealen Breitbandprozess ist $\alpha = 0$.

d) Die lokalen Maxima U der Pfade des Prozesses \mathfrak{X} genügen einer sogenannten Rice-Verteilung mit den Parametern α und $\sigma = \sqrt{m_0}$. Eine Rice-Verteilung mit den Parametern α und σ besitzt dabei die Verteilungsdichte

$$f_U[u] = \begin{cases} \frac{\alpha(u+c)}{\sigma^2} e^{-\frac{(u+c)^2}{2\sigma^2}} I_0\left[\frac{c(u+c)}{2\sigma^2}\right] / k & \text{für } u \geq -c \\ 0 & \text{für } u < -c \end{cases}$$

Dabei bezeichnet I_0 die modifizierte Besselfunktion 0-ter Ordnung, k jene Konstante, welche $f_U[u]$ zu einer Verteilungsdichte macht und

$$c = \sigma \sqrt{(1 - \alpha^2) / (1 - (1 - \alpha)^2)}$$

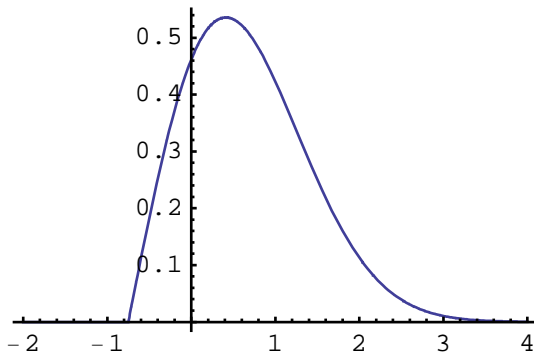
Für $\alpha = 0$ entspricht die Rice-Verteilung einer Normalverteilung mit Mittelwert 0 und Streuung σ ; für $\alpha = 1$ entspricht die Rice-Verteilung eine Rayleighverteilung mit Parameter σ .

▼

Beweis:

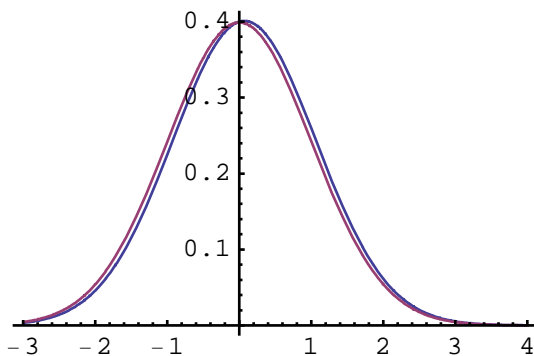
Graphische Veranschaulichung der Rice-Verteilung mit den Parametern α und σ :

```
pdfRice[α_, σ_, u_] := Module[{c, k},
  c = σ √((1 - α²) / (1 - (1 - α)²));
  k = NIntegrate[α (x + c) / σ² Exp[-(x + c)² / (2 σ²)] BesselI[0, (x + c) c / σ²], {x, -c, ∞}];
  Piecewise[{{α (u + c) / σ² Exp[-(u + c)² / (2 σ²)] BesselI[0, (u + c) c / σ²] / k, u > -c}}]
]
Plot[pdfRice[0.7, 1, u], {u, -2, 4}, PlotRange → All, ImageSize → {200, 150}]
```

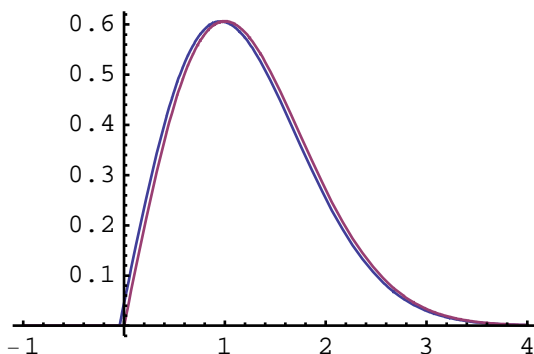


Die Rice-Verteilung mit den Parametern $\alpha = 0$ und σ entspricht der Normalverteilung $\mathcal{N}[0, \sigma]$; Die Rice-Verteilung mit den Parametern $\alpha = 1$ und σ entspricht der Rayleigh-Verteilung $\mathcal{R}[\sigma]$:

```
α = 0.01; σ = 1;
Plot[{pdfRice[α, σ, u], PDF[NormalDistribution[0, σ], u]},
  {u, -3, 4}, PlotRange → All, ImageSize → {200, 150}]
```



```
α = 0.999; σ = 1;
Plot[{pdfRice[α, σ, u], PDF[RayleighDistribution[σ], u]},
  {u, -1, 4}, PlotRange → All, ImageSize → {200, 150}]
```



27.6.2 Beispiel: Wir berechnen die Maßzahlen ν_0 , ν_p und α für DAXD mit Hilfe der obigen formeln und zeichnen die theoretische Verteilungsdichte der lokalen Maxima.

▼

Lösung:

α) Wir ermitteln die Werte m_0 , $k[0]$ und $\mathbb{V}[X_0]$:

$$\nu_0 = \sqrt{m_2 / m_0} / (2 \pi);$$

$$\nu_p = \sqrt{m_4 / m_2} / (2 \pi);$$

$$\alpha = m_2 / \sqrt{m_0 m_4};$$

```
Print[" $\nu_0$ =",  $\nu_0$ ]
```

```
Print[" $\nu_p$ =",  $\nu_p$ ]
```

```
Print[" $\alpha$ =",  $\alpha$ ]
```

```
Clear[ $\nu_0$ ,  $\nu_p$ ]
```

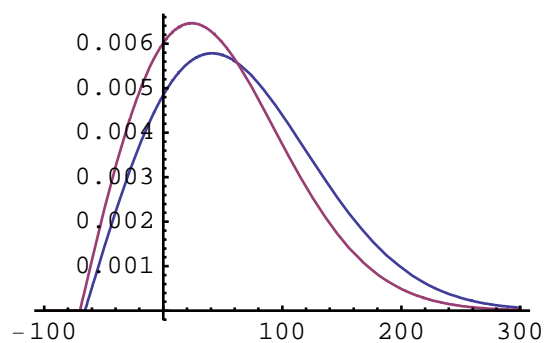
```
 $\nu_0$ =0.445045
```

```
 $\nu_p$ =0.603628
```

```
 $\alpha$ =0.737284
```

```
Plot[{pdfRice[ $\alpha$ ,  $\sqrt{m_0}$ , u], PDF[RayleighDistribution[ $\sqrt{m_0}$ ], u + 70]},  
  {u, -100, 300}, PlotRange -> All, ImageSize -> {200, 150}, PlotPoints -> 40]
```

$\sqrt{m_0}$



93.8997

Die lokalen maxima von DAXD sind somit annähernd Rayleighverteilt mit dem Parameter $\sigma = \sqrt{m_0} = 93.9$

27.7 Spektraldichten von Geschwindigkeit und Beschleunigung

Sei $\mathfrak{X} = \{X_t \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ ein schwach stationärer, ergodischer, stochastischer Prozess mit $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_0] = 0$, der vier mal differenzierbaren Kovarianzfunktion $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und der Spektraldichte $f_d: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (der Index d steht dabei für "displacement"). In diesem Fall existiert sowohl der "Geschwindigkeitsprozess" $\mathfrak{X}' = \{X_t' \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ als auch der "Beschleunigungsprozess" $\mathfrak{X}'' = \{X_t'' \mid t \in \mathbb{R}_+\}$, dessen Spektraldichten f_v bzw f_a wir nun untersuchen wollen:

Falls $k[\tau]$, $k'[\tau]$, $k''[\tau]$ und $k'''[\tau]$ für $\tau \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergieren (dies ist beispielsweise dann der Fall, wenn k , k' , k'' und k''' integrierbar sind), so lässt sich der folgende Satz einfach mit partieller Integration beweisen. Im allgemeinen Fall benötigt man tiefliegende Methoden über Distributionen:

27.7.1 Satz: Für alle $\varphi \in \mathbb{T}_\Phi$ gilt

$$f_v[\varphi] = \varphi^2 f_d[\varphi]$$

$$f_d[\varphi] = \varphi^2 f_v[\varphi] = \varphi^4 f_d[\varphi]$$

Dieser Zusammenhang ist für die Praxis deshalb von großer Bedeutung, weil sich die Beschleunigungen oft wesentlich leichter ermitteln lassen.

▼

Beweis:

27.7.2 Beispiel: Wir betrachten den Prozess $\mathfrak{X} = \{X_t | t \in \mathbb{R}_+\}$ mit $X_t = A \cos[\alpha t + Z]$, wobei Z eine im Intervall $[0, 2\pi]$ gleichverteilte Zufallsvariable ist und die Kreisfrequenz α größer 0 ist. Von diesem schwach stationären, ergodischen Prozess kennen wir die Kovarianzfunktion (siehe [Beispiel 27.1.5](#))

$$k_d[\tau] = A^2 \cos[\alpha \tau] / 2$$

sowie die (diskrete) Spektraldichte (vgl. [Beispiel 27.4.3](#))

$$f_d[\varphi] = \begin{cases} A^2/4 & \text{für } \varphi = \pm \alpha \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für diesen Prozess sind die Spektraldichten $f_v[\varphi]$ bzw $f_a[\varphi]$ des Geschwindigkeitsprozesses bzw des Beschleunigungsprozesses gesucht.

▼

Lösung: Gemäß des eben erwähnten Satzes muss gelten

$$f_v[\varphi] = \begin{cases} \alpha^2 A^2/4 & \text{für } \varphi = \pm \alpha \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{bzw} \quad f_a[\varphi] = \begin{cases} \alpha^4 A^2/4 & \text{für } \varphi = \pm \alpha \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir berechnen diese beiden Spektraldichten nun direkt. Für den Geschwindigkeitsprozess bzw den Beschleunigungsprozess

$$\mathfrak{X}' = \{X_t' | t \in \mathbb{R}_+\} \quad \text{mit} \quad X_t' = -\alpha A \sin[\alpha t + Z]$$

bzw

$$\mathfrak{X}'' = \{X_t'' | t \in \mathbb{R}_+\} \quad \text{mit} \quad X_t'' = -\alpha^2 A \cos[\alpha t + Z]$$

gilt wegen

$$\begin{aligned} & \text{Integrate}[(-\alpha A \sin[\omega]) (-\alpha A \sin[\alpha \tau + \omega]), \{\omega, 0, 2\pi\}] / (2\pi) \\ & \text{Integrate}[(-\alpha^2 A \cos[\omega]) (-\alpha^2 A \cos[\alpha \tau + \omega]), \{\omega, 0, 2\pi\}] / (2\pi) \\ & \frac{1}{2} A^2 \alpha^2 \cos[\alpha \tau] \\ & \frac{1}{2} A^2 \alpha^4 \cos[\alpha \tau] \end{aligned}$$

offenbar

$$k_v[\tau] = \frac{1}{2} \alpha^2 A^2 \cos[\alpha \tau] \quad \text{bzw} \quad \frac{1}{2} \alpha^4 A^2 \cos[\alpha \tau]$$

und damit die Spektraldichten

$$f_v[\varphi] = \begin{cases} \alpha^2 A^2/4 & \text{für } \varphi = \pm \alpha \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{bzw} \quad f_a[\varphi] = \begin{cases} \alpha^4 A^2/4 & \text{für } \varphi = \pm \alpha \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

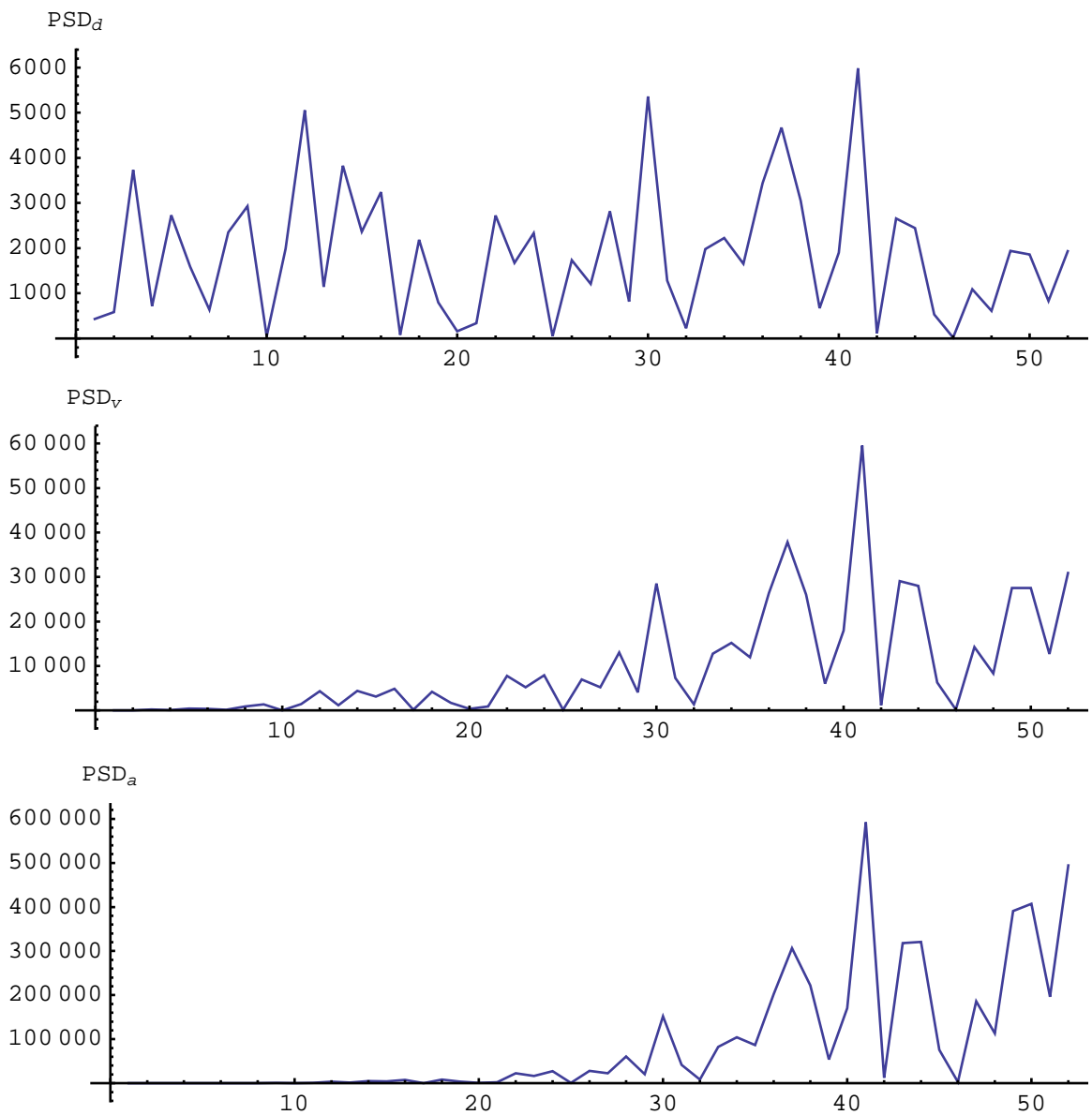
27.7.3 Beispiel: Wir berechnen die Spektraldichten der Geschwindigkeit bzw der Beschleunigung für den Fall, dass sich die Daten mit der Geschwindigkeit Δt cm/sek ändern (wird die Geschwindigkeit c cm/sek abgefahren,

so PSD_v mit c und PSD_a mit c^2 zu multiplizieren).

▼

Lösung:

```
wmax = 4;
ListPlot[Take[PSD[DAXDdata, Δt], {1, Tmax wmax}], Joined → True, ImageSize → {500, 150},
  PlotRange → All, AspectRatio → 0.3, AxesLabel → {"Wellenzahl", "PSDd"}]
ListPlot[Take[PSD[DAXDdata, Δt] Table[(i / Tmax)2, {i, 1, m}], {1, Tmax wmax}],
  Joined → True, ImageSize → {500, 150}, PlotRange → All,
  AspectRatio → 0.3, AxesLabel → {"Wellenzahl", "PSDv"}]
ListPlot[Take[PSD[DAXDdata, Δt] Table[(i / Tmax)4, {i, 1, m}], {1, Tmax wmax}],
  Joined → True, ImageSize → {500, 150}, PlotRange → All,
  AspectRatio → 0.3, AxesLabel → {"Wellenzahl", "PSDa"}]
```



Eine direkte Berechnung von PSD_v bzw. PSD_a liefert ähnliche Werte (man beachte dabei, dass bei der Geschwindigkeit durch $2\pi \Delta t$ und bei Beschleunigung durch $(2\pi \Delta t)^2$ zu dividieren ist):


```
wmax = 4;
ListPlot[Take[PSD[(Rest[DAXDdata] - Most[DAXDdata]) / (2  $\pi$   $\Delta t$ ),  $\Delta t$ ], {1, Tmax wmax}],
  Joined  $\rightarrow$  True, ImageSize  $\rightarrow$  {500, 150}, PlotRange  $\rightarrow$  All,
  AspectRatio  $\rightarrow$  0.3, AxesLabel  $\rightarrow$  {"Wellenzahl", "PSDa"}]
ListPlot[Take[PSD[
  (Rest[Rest[DAXDdata]] - 2 Rest[Most[DAXDdata]] + Most[Most[DAXDdata]]) / (2  $\pi$   $\Delta t$ )2,
   $\Delta t$ ], {1, Tmax wmax}], Joined  $\rightarrow$  True, ImageSize  $\rightarrow$  {500, 150},
  PlotRange  $\rightarrow$  All, AspectRatio  $\rightarrow$  0.3, AxesLabel  $\rightarrow$  {"Wellenzahl", "PSDa"}]
```

