Stochastische Processe, Übungen, WS 2017/2018

5. Übungsblatt, für den 23.11.2017

Beispiel 21
Die Anzahl Y der bei einem Zählgerät während eines Zeitintervalls der Länge 1 ankommenden Teilchen ist $\mathcal{P}(\lambda)$ Poissonverteilt. Jedes dieser Teilchen wird unabhängig von den anderen Teilchen von dem Zählgerät mit Wahrscheinlichkeit p registriert. $Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_Y$ ist die Anzahl der regiestrierten Teilchen. Also X_i-binomialverteilt mit identischer erzeugender Funktion $\mathcal{G}_X(s)$. Man ermittle mit Hilfe der erzeugenden Funktion $\mathcal{G}_Z(s)$ die Verteilung der Anzahl Z der registrierten Teilchen.

Beispiel 22
Die Bedienzeit X_i der im Puffer stehenden Nachricht i ist exponentialverteilt mit dem Parameter μ_i. Die Zufallsvariable X_i sind umabhängig. Bestimmen Sie mit Hilfe der Laplace-Transformation die Verteilung der Wartezeit T einer Nachricht, falls zwei andere Nachrichten zuerst bearbeitet werden müssen.
Hinweis: Zerlegen Sie die Laplace-Transformation der Wartezeit T in Partialbrüche und danach verwenden Sie die Rücktransformation.

Beispiel 23
Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 seien unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter $\lambda_1$bzw. λ_2. Berechnen Sie die Verteilung von $X_1 - X_2$. Lösen Sie damit folgendes Problem: Die Lebensdauern zweier Geräte seien unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter λ_1 bzw. λ_2. Bestimmen Sie die Wahsrcheinlichkeit dafür, dass das erste Gerät länger hält als das zweite.

Beispiel 24
Zeigen Sie, dass der stochastische Prozess

$$\mathcal{Z}_T = \{Z_t\}_{t \in T} \quad \text{mit} \quad Z_t = Xf(t),\ f(t) \in \mathbb{C}$$

von zweiter ordnung ist, falls die Zufallsvariable X quadratische integrierbar ist. Bestimmen Sie die entsprechende Kovarianz $\mathbb{K}(s,t)$.

Beispiel 25
Beweisen Sie: Falls die Zufallsvariable $X_1, X_2 \ldots, X_n$ quadratisch integrierbar sind, so ist der kontinuierliche komplexe stochastische Prozess

$$\mathcal{Z}_{\mathbb{R}_+} = \{Z_t\}_{t \in \mathbb{R}_+} \quad \text{mit} \quad Z_t = \sum_{k=1}^{n} X_k e^{i\lambda_k t}$$

von zweiter Ordnung und es gilt $\forall s, t \in \mathbb{R}_+$:

$$\mathbb{K}(s,t) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \mathbb{K}(X_k, X_l) e^{i(\lambda_k s - \lambda_l t)}.$$

Beispiel 26
Sei $\mathcal{Z}_T = \{Z_t\}_{t\in T}$ ein stochastischer Prozess mit

$$Z_t = b\cos(Y + \beta t),$$

wobei b eine Konstante ist, Y eine im Intervall $[0, 2\pi]$ gleichverteilte Zufallsvariable ist und die Kreisfrequenz β größer 0 ist. Zeigen Sie, dass der stochastische Prozess $\mathcal{Z}_T$ schwach stationär ist.