Mathematik III - Gewöhnliche Differentialgleichungen WS 2013/14

5.Übungsblatt
Lösung der Aufgabe 5.2

Bestimmen Sie die Lösung der DGL

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \frac{1}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = 0, \quad 0 < x < 2,\, t > 0$$

mit den Anfangs- und Randbedingungen

$$u(0,t) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(2,t) = 0,$$

$$u(x,0) = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4}x\right),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -2\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) + \sin\left(\frac{15\pi}{4}x\right).$$

Separationsansatz. Zur Berechnung spezieller Lösungen dieser Differentialgleichung wählen wir den Produktansatz

$$u(x,t) = X(t)T(t),$$

setzen ihn in die Differentialgleichung ein und erhalten

$$X''(x)T(t) - \frac{1}{9}X(x)T''(t) = 0,$$

was nach Trennung der Variablen (**Variablenseparation**) die Differentialgleichung

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{9}\frac{T''(t)}{T(t)}$$

ergibt. Weil die linke Seite nur von x und die rechte nur von t abhängt, kann Gleichein nur dann herrschen, wenn beide Seite konstant sind, wenn also

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{9}\frac{T''(t)}{T(t)} =: -\lambda$$

gilt, wobei λ als **Separationsparameter** bezeichnet wird.

Wir erhalten nun zwei gewöhnliche homogene Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0,\\ T''(t) + 9\lambda T(t) &= 0, \end{aligned}$$

deren Lösungen $(0 \le x \le 2)$

$$\begin{aligned} X(x) &= \alpha\cos(\sqrt{\lambda}x) + \beta\sin(\sqrt{\lambda}x), && \text{falls } \lambda > 0,\\ X(x) &= \alpha + \beta x, && \text{falls } \lambda = 0,\\ X(x) &= \alpha e^{\sqrt{|\lambda|}x} + \beta e^{-\sqrt{|\lambda|}x} && \text{falls } \lambda < 0 \end{aligned}$$

und (für $t \geq 0$)

$$\begin{aligned} T(t) = a\cos(\sqrt{\lambda}3t) + b\sin(\sqrt{\lambda}3t), &\quad \text{falls } \lambda > 0,\\ T(t) = a + bt, &\quad \text{falls } \lambda = 0,\\ T(t) = ae^{\sqrt{|\lambda|}3t} + be^{-\sqrt{|\lambda|}3t} &\quad \text{falls } \lambda < 0 \end{aligned}$$

wir kennen. Alle Linearkombinationen von Produkten der Gestalt $X(x)T(t)$ mit demselben λ lösen die homogene Differentialgleichung.

Aus Randbedingungen für $u(x,0)$ und $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$ folgt unmittelbar, dass die spezielle Lösungen der Differentialgleichung eine trigonometrische Funktion sin(...) enthalten mussen, d.h. muss $\lambda > 0$ sein.

Anpassung der Lösungen an die Randbedingungen.

Gesucht ist nun die Funktion

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

mit $u(0,t) = 0$ und $\frac{\partial u}{\partial x}(2,t) = 0$. Erhlt man also

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \text{ und } X'(2)T(t) = 0.$$

Soll $T(t)$ nicht identisch gleich 0 sein, so muss $X(x)$ die Bediengung

$$X(0) = X'(2) = 0$$

erfüllen. Daraus erhlt man für $X(x)$ das bereits bekannte **Eigenwertproblem**

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad \text{mit } X(0) = X'(2) = 0.$$

Für den Ansatz

$$X(x) = \alpha\cos(\sqrt{\lambda}x) + \beta\sin(\sqrt{\lambda}x)$$

erhalte wir

$$\begin{aligned} &X(0) = \alpha = 0,\\ &X'(x) = -\alpha\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x) + \beta\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x),\\ &X'(2) = \beta\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}2) = 0, \text{ da } \alpha = 0. \end{aligned}$$

Unter der Annahme, dass $\beta \neq 0$ (sonst triviale Lösung), muss

$$\cos(\sqrt{\lambda}2) = 0.$$

Daraus folgt, dass für $X(t)$ nichttriviale Lösungen nur für die Werte

$$\lambda = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right)^2$$

existieren und die spezille Lösungen sind

$$X_n(x) = \beta_n \sin\left(\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right)x\right).$$

Da $\lambda > 0$ gelten muss, sind die zugehörige Lösungen für $T(t)$ durch

$$T_n(t) = a_n\cos\left(\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right)3t\right) + b_n\sin\left(\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right)3t\right)$$

Alle Linearkombinationen von Funktionen der Gestalt $X_n(x)T_n(t)$ lösen die homogene Differentialgleichung und erfüllen die homogene Randbedingungen.

Jede konvergente Reihe der Gestalt

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x)T_n(t) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \sin\left(\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)x\right)\left[a_n \cos\left(\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)3t\right) + b_n \sin\left(\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)3t\right)\right] = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)x\right)\left[\beta_n a_n \cos\left(\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)3t\right) + \beta_n b_n \sin\left(\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)3t\right)\right] = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)x\right)\left[\tilde{a}_n \cos\left(\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)3t\right) + \tilde{b}_n \sin\left(\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)3t\right)\right]
\end{aligned}
$$

ist also die Lösung des Randwertproblems, wobei die Konstanten $\tilde{a}_n = \beta_n a_n$ und $\tilde{b}_n = \beta_n b_n$ noch nicht bekannt sind. Diese Konstanten ermitteln wir mit Hilfe der Randbedingungen

$$
u(x,0) = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4}x\right),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -2\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) + \sin\left(\frac{15\pi}{4}x\right).
$$

Aus der Bedingung für $u(x,0)$ es folgt,

$$
u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x)T_n(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n \sin\left(\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)x\right) = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4}x\right).
$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert für $n=1$

$$
\tilde{a}_1 = -\frac{1}{2}, \quad \tilde{a}_n = 0,\, n \neq 1.
$$

Aus der Bedingung für $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$ es folgt,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)x\right)\left[-\tilde{a}_n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)3\sin\left(\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)3t\right) + \right. \\
&\quad \left. + \tilde{b}_n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)3\cos\left(\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)3t\right)\right], \\
\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{b}_n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)3\sin\left(\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)x\right) = -2\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) + \sin\left(\frac{15\pi}{4}x\right).
\end{aligned}
$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert für $n=0, n=7$

$$
\begin{aligned}
\tilde{b}_0\frac{3\pi}{4} &= -2 \Rightarrow \tilde{b}_0 = -\frac{8}{3\pi}, \\
\tilde{b}_7\frac{3\cdot 15\pi}{4} &= 1 \Rightarrow \tilde{b}_7 = \frac{4}{45\pi}.
\end{aligned}
$$

Schliesslich erhält man die Lösing in der Form

$$
u(x,t) = -\frac{8}{3\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)\sin\left(\frac{3\pi}{4}t\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4}x\right)\cos\left(\frac{9\pi}{4}t\right) + \frac{4}{45\pi}\sin\left(\frac{15\pi}{4}x\right)\sin\left(\frac{45\pi}{4}t\right).
$$