Zuverlässigkeitstheorie Übungen
SS 2017
9.Übungsblatt
Aufgaben für den 08.06.2017

1. Gegeben ist ein Markovprozess $\{X(t)\}_{t\in T}$ mit dem Übergangsgraph (Abbildung 1), wobei $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 5, \beta_2 = 6$.

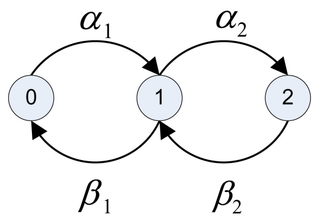

Abbildung 1: Übergangsgraph des Markovprozesses $\{X(t)\}_{t\in T}$

1) Bestimmen Sie das Zustandsraum E und infinitesimal Matrix A des Prozesses $\{X(t)\}_{t\in T}$. Ist der Markovprozess irreduzibel? Welche Zustnde sind wesentlich und nicht wesentlich?

2) Bestimmen Sie mit der Lösung im Form des Matrixexponentialfunktion näherungsweise die Übergangsmatrix $P(t)$ an der Stelle $t = 0.01$. Hinweis: Zerlegen Sie die Matrixexponentialfunktion in eine Reihe bis zur Ordnung 3.

3) Bestimmen Sie die Grenzverteilung $\pi_j, j \in E$, des Prozesses. Bestimmen Sie die stationäre Verteilung $q_j, j \in E$, von $\{X(t)\}_{t\in T}$.

2. Gegeben ist ein Markovprozess $\{X(t)\}_{t\in T}$ mit dem Übergangsgraph (Abbildung 2), wobei $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_1 = 5$.

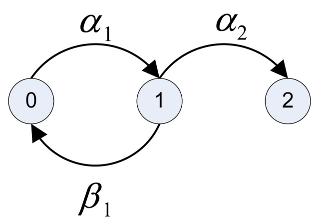

Abbildung 2: Übergangsgraph des Markovprozesses $\{X(t)\}_{t\in T}$

1) Bestimmen Sie das Zustandsraum E und infinitesimal Matrix A des Prozesses $\{X(t)\}_{t\in T}$. Ist der Markovprozess irreduzibel?

2) Bestimmen Sie mit der Lösung im Form des Matrixexponentialfunktion näherungsweise die Übergangsmatrix $P(t)$ an der Stelle $t = 0.01$. Hinweis: Zerlegen Sie die Matrixexponentialfunktion in eine Reihe bis zur Ordnung 3. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Beispiel 1.

3) Bestimmen Sie die stationäre Verteilung $q_j, j \in E$, von $\{X(t)\}_{t\in T}$.

4) Bestimmen Sie mittlere Verweildauer $E_i^{(1)} = \mathbb{E}[T|X(0) = i]$ in der Menge M der nicht wesentlichen Zustände, $i \in M$, und die entsprechende Varianz $\mathbb{V}[T|X(0) = 0]$. Hinweise: Verwenden Sie dafür die Gleichungen

$$\sum_{k \in M} (-a_{i,k}) E_k^{(n)} = n E_i^{(n-1)},$$

wobei $E_i^{(n)} = \mathbb{E}[T^n|X(0) = i], i \in M, n \in \mathbb{N}$.

3. Gegeben ist ein Markovprozess $\{X(t)\}_{t \in T}$ mit dem Übergangsgraph (Abbildung 3), wobei $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 4, \beta_1 = 5$.

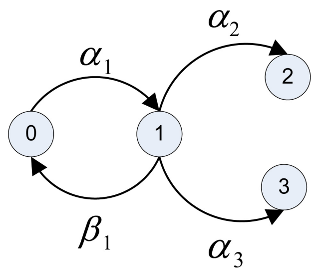

Abbildung 3: Übergangsgraph des Markovprozesses $\{X(t)\}_{t \in T}$

1) Bestimmen Sie das Zustandsraum E und infinitesimal Matrix A des Prozesses $\{X(t)\}_{t \in T}$. Ist der Markovprozess irreduzibel?

2) Bestimmen Sie mit der Lösung im Form des Matrixexponentialfunktion näherungsweise die Übergangsmatrix $P(t)$ an der Stelle $t = 0.01$. Hinweis: Zerlegen Sie die Matrixexponentialfunktion in eine Reihe bis zur Ordnung 3.

3) Bestimmen Sie die stationäre Verteilung $q_j, j \in E$, von $\{X(t)\}_{t \in T}$.

4) Bestimmen Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten $q_{i,j}^* = \mathbb{P}[X(T) = j|X(0) = 0]$ von nicht wesentlichen Zustnde $i \in M$ in wesentlichen Zustände $j \in E \setminus M$. Hinweis: Verwenden Sie dafür die Gleichungen

$$\sum_{k \in M} (-a_{i,k}) q_{k,j}^* = a_{i,j}.$$

5) Berechnen Sie die mittlere Übergangszeit $E_{i,j} = \mathbb{E}[T|X(0) = i \wedge X(T) = j]$ von nicht wesentlichen Zustände $i \in M$ in wesentlichen Zustände $j \in E \setminus M$. Hinweise: Verwenden Sie dafür die Gleichungen

$$E_{i,j} = \frac{c_{i,j}}{q_{i,j}^*},$$

wobei für $j \in E \setminus M$ $c_{i,j}$ als eindeutige Lösung von

$$\sum_{l \in M} (-a_{i,l}) c_{l,j} = q_{i,j}^*$$

erhältlich ist.