Übung 2

zur Vorlesung "Bedienungstheorie"

2.1 Aufgabe

Ein gewisse Rechnensystem sei nur in drei Zuständen beobachtbar: "besetzt", "frei", "in Wartung befindlich". Diesen Systemzuständen seien beziehungsweise die Zahlen 1,2,3 zugeordnet. Das Rechnensystem verhalte sich wie ein homogene Markov-Prozeß, d.h., die Wahrscheinlichkeit für die Annahme eines Zuständes hängt nur vom letzten beobachteten Zustand ab, und alle Übergangswahrscheinlichkeiten können stets auf ein bei Null beginnendes Intervall bezogen werden. Unter der Annahme, daß das System in gleichen Abständen (etwa jeden Tag zu gleicher Uhrzeit 14.00 Uhr) beobachtet wird, sei

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.6 & 0.0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

die Übergangsmatrix. Beweisen Sie, daß der erwähnte Markov-Prozeß irreduzibel ist, d.h., daß $p_{ij}^{(n)} > 0$ für alle $i, j \in E = \{1, 2, 3\}$ und alle $n \geq 0$ gilt.

2.2 Aufgabe

Ein Vertreter arbeitet in den Städten A, B und C. Er verkauft nie an zwei aufeinanderfolgenden Tagen in derselben Stadt. Ist er in A, so fährt er am nächsten Tag nach B. Ist er in B oder C, dann ist es doppelt so wahrscheinlich, das er am nächsten Tag nach A als in die andere Stadt fährt. Wie oft verkauft er, auf die Dauer gesehen in jeder Stadt?

2.3 Aufgabe

Vier Server S1, S2, S3 und S4 schicken zueinander ein Datenpaket. Server S1 und S2 übertragen es dem anderen mit Wahsrcheinlichkeit 1/2 und den Server S3 und S4 jeweils mit Wahrscheinlichkeit 1/4. Die Server S3 und S4 senden es den Server S1 und S2 jeweils mit Wahsrcheinlichkeit 1/2 und nie den Server S3 und S4. Wie oft bekommt jeder Server (auf Dauer gesehen) das Datenpaket.

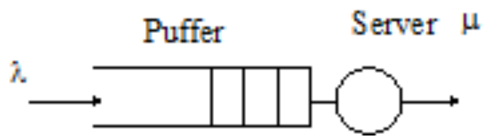
2.4 Aufgabe

Ein "Stop-and-Wait" - Protokoll reguliert den Nachrichtenaustausch zwischen zwei Rechnern (A=Sender, B=Empfänger), indem nach Absenden einer Nachricht von A nach B der Sender mit dem Absenden der nächsten Nachricht wartet, bis er eine Empfangsbestätigung (positive Quittung) von B erhalten hat. Auf diese Weise wird verhindert, daß Rechner B überflutet werden kann (also Nachrichten mit höhere Rate empfängt, als abgearbeitet werden können).

Unter der Annahme, daß Übertragungsfehler nur auf der Verbindung von A nach B, nicht jedoch auf dem Weg von B nach A auftreten können, sei p Fehlerwahrscheinlichkeit ("Bit error rate", BER) des Kanals A→B. Nachrichten (Pakete) seien von konstanter Länge L [bits], Quittungen seien Q [bits] lang, und die Kanalkapazität in beiden Richtungen betrage C [bps], so daß für die Einspeisung einer Nachricht in die Leitung m=$\frac{L}{C}$Sekunden, für die Einspeisung einer Quittung q=$\frac{Q}{C}$Sekunden verbraucht werden. Der Sender sendet eine (stets verfügbare) nächste Nachricht immer nur dann, wenn er eine positive Quittung für die vorherige volständig empfangen hat. Schließlich nehmen wir noch eine Signallaufzeit von τ Sekunden pro Weg an.
Wieviele Sekunden vergehen im Mittel zwischen dem Beginn einer ersten und dem Beginn der nächsten Nachrichtenubertragung?

2.5 Aufgabe

Für ein Rechnensystem sei die Übertragungsgeschwindigkeit ("Kanalkapazität") von K=1Mbps (Megabits pro Sekunde). Das System verhalte sich wie eine M/M/1 Warteschlange.



Übertragen werden sollen Pakete von gleicher Länge L=1000 Bits. Die Ankunftzeitpunkte der Pakete bilden einen Poisson-Strom der Intensität λ=800[$\frac{\text{Pakete}}{\text{Zeiteinheit}}$]. Bestimmen Sie die mittlere Gesamtanzahl der Pakete im System (Anzahl der Pakete im Puffer+ein in der Bedienung befindliches).

2.6 Aufgabe

Nehmen Sie ein einfach rückgekoppeltes M/M/1-Warteschlangensystem an, bei der ein abgefertigter Kunde mit der Wahrscheinlichkeit α wieder in das System eingeschleust wird. Neue Kunden kommen mit der Rate λ am Warteschlangensystem an. Alle Kunden werden mit der gleicher Rate μ vom Server des Warteschlangensystems bedient.
(a) Skizzieren Sie das Gesamtsystem.
(b) Berechnen Sie die mittlere Zeit, die ein Kunde benötigt, um durch das Gesamtsystem geschleust zu werden.

2.7 Aufgabe

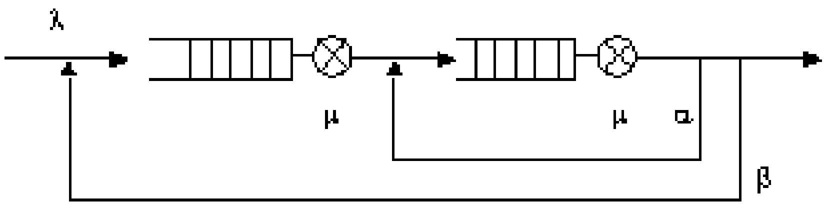
Gegeben sei ein System, das sich aus zwei M/M/1-Warteschlangensystemen W_1und W_2zusammensetzt. Die Kunden kommen gemäß einer Exponentialverteilung mit dem Parameter λ am Gesamtsystem an. Jeder einzelne Kunde geht mit der Wahrscheinlichkeit p entweder in das Warteschlangensystem W_1oder mit der Wahrscheinlichkeit 1-p in das Warteschlangensystem W_2.
(a) Skizzieren Sie das Gesamtsystem.
(b) Die Bedienzeiten auf den beiden Servern sind exponentialverteilt mit den Parametern $\mu_1$und μ_2. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit p derart, daß die mittlere Zeit, die ein Kunde im Gesamtsystem verbringt, minimiert wird. Diese Zeitspanne wird auch mittlere Verweilzeit eines Kunden im Warteschlangensystem genannt. Sie

setzt sich aus der mittleren Wartezeit und der mittleren Bedienzeit eines Kunden zusammen. Berechnen Sie zuerst den allgemeinen Fall, anschließend verwenden Sie für die Parameter λ, μ_1 und μ_2 die folgenden Werte: $\lambda=2$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 1.5$.

(c) Berechnen Sie für die in Teilaufgabe (b) vorgegebenen Werte die mittlere Zeit, die ein Kunde im Gesamtsystem verbringt.

2.8 Aufgabe

Gegeben sei das folgende Warteschlangennetz



(a) Bestimmen Sie die mittlere Zeit, die ein Kunde benötigt, um durch das gesamte System zu wandern (mit den Parametern α=0.25 und β=0.5)

(b) Geben Sie eine Bedingung für λ an, die die Stabilität des Gesamtsystems garantiert.