Übung 3

zur Vorlesung "Bedienungstheorie"

3.1 Aufgabe

Messungen an einem Internet-Gateway haben gezeigt, daß dort im Mittel 125 Datenpakete pro Sekunde ankommen. Das Gateway benötigt im Mittel 2 Millisekunden für die Verarbeitung und anschließende Weiterleitung eines Datenpakets. Verwenden Sie ein M/M/1-Warteschlangensystem für die Analyse des Gateways, und lösen Sie damit die folgenden Teilaufgaben:

(a) Wie groß ist die im Gateway zu erwartende mittlere Anzahl der Datenpakete?

(b) Wie groß ist die in der Warteschlange des Gateways zu erwartende mittlere Warteschlangelänge?

(c) Wie lang ist die mittlere Zeit, die sich ein Datenpaket im Gateway aufhält?

(d) Wie groß ist die Wahrscheinlickeit eines Überlaufs der Warteschlange des Gateways, wenn die Warteschlange 13 Pufferplätze bereit hält?

(e) Wie viele Pufferplätze werden in der Warteschlange des Gateways mindestens benötigt, damit die Wahrscheinlichkeit eines Überlaufs der Warteschlange kleiner ist als 10^{-6}?

(f) Warum ist es auch bei den Teilaufgaben (d) und (e) gerechtfertigt, das Gateway durch ein M/M/1-Warteschlangensystem zu modellieren und nicht etwa die exakte Beschreibung durch ein M/M/1/N -Warteschlangensystem zu verwenden.

3.2 Aufgabe

Untersuchen Sie die M/M/2/10 - Warteschlange. Bestimmen Sie die Gleichgewichtsverteilung für λ=1 und $\mu = 0.4$. Warum erreicht diese immer ein Gleichgewicht? Bestimmen Sie die Blokierwahrscheinlichkeit. Wie groß muss μ sein, damit für den fixierten Wert λ=1 die Blokierwahsrcheinlichkeit 1% oder weniger betragen kann.

3.3 Aufgabe

Betrachten Sie eine Warteschlange M/M/1/K mit exponential verteilten Zwischenankunftszeiten (mit Rate λ=1) und einem Bediener mit ebenfalls exponential verteilten Bedienzeiten (mit Bedienrate $\mu = 2$), wobei die Pufferkapazität K frei gewählt werden kann. Zu jedem solchen K ergibt sich eine mittlere Wartezeit $W_q(K)$ in der Warteschlange für die Jobs im System. Ziel ist die Untersuchung des folgenden Optimierungsproblems: Die Gesamtkosten des System ergeben sich als $C(K) = c_1\, W_q(K) + c_2\, p_{K+1}(K)$, wobei c_1 – die Kosten für die Belegung von Plätzen in der Warteschlange und c_2 –die Kosten für einen verlorenen Kunden. Bestimmen Sie nun den optimalen Wert von K mit den geringsten Gesamtkosten.

3.4 Aufgabe

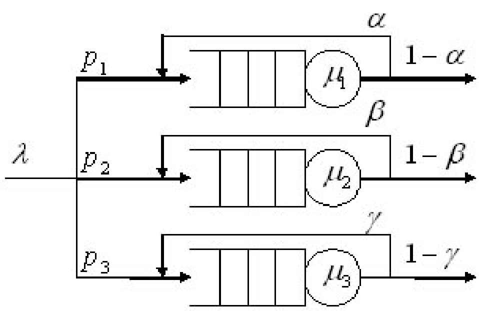
Betrachten Sie eine Warteschlange M/M/1/K mit λ=1 and $\mu = 2$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Wartezeit im Warteschlange $Q_q \leq 0.1$ ist. Nehmen Sie für K den Wert aus der Aufgabe 5.3. (mit *Mathematica*)

3.5 Aufgabe

Berechnen Sie für ein M/M/1/K - Warteschlangensystem die Blockierwahrscheinlichkeit für eine maximal mögliche Anzahl von Kunden im Warteschlange von K=5 und für eine Auslastung des Warteschlangensystems von $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 1$.

3.6 Aufgabe

Gegeben sei ein System, das sich aus drei M/M/1-Warteschlangensystemen W_1, W_2 und W_3zusammensetzt (siehe Abbildung). Die Kunden kommen gemäß einer Exponentialverteilung mit dem Parameter λ am Gesamtsystem an. Jeder einzelne Kunde geht mit der Wahrscheinlichkeit p1, p2 und p3 in das Warteschlangensystem W_1, in das Warteschlangensystem W_2 bzw in das Warteschlangensystem W_3.
(a) Berechnen Sie die mittlere Zeit, die ein Kunde im Gesamtsystem verbringt, falls λ=0.7, μ1=0.6, μ2=0.8, μ3=1.2, p1=0.5,p2=0.3, p3=0.2. (Ohne Berechnung der Grenzverteilung).
(b) Wann existiert fütr das System ein Gleichgewicht?



3.7 Aufgabe

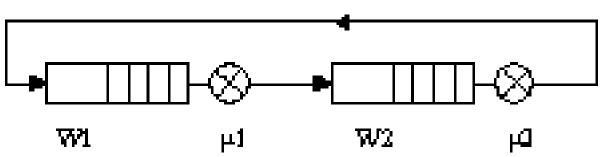
Gegeben ist ein M/M/10 System mit λ=0.8, μ=0.1. Prüfen Sie, ob eine Gleichgewichtsverteilung existiert. Sei N die Zufallsvariable der Anzahl von Paketen in diesem System. Bestimmen Sie n so, dass

$$\mathbb{P}[N > n] \leq 0.01$$

gilt.

3.8 Aufgabe

Gegeben sei das folgende Warteschlangennetz mit den endlichen Zustandsraum I={0,1,...,M}



Sei $p_n = \mathbb{P}[n$ Kunden in der Warteschlangensystem W1 und $M - k$ in der Warteschlangensystem W2].

(a) Skizzieren Sie den Übergangsgraph.

(b) Schreiben Sie die Gleichungssystem für die p_n aus.

(c) Bestimmen Sie z-Transformierte P(z)=$\sum_{n=0}^{M} p_n\, z^n$

(d) Bestimmen Sie p_n.