Übung 6

zur Vorlesung "Bedienungstheorie"

6.1 Aufgabe

Gegeben sei das System $M/H_2/1$. Die Verteilungsdichte für die Bedienzeit ist gegeben durch

$$f_B(t) = \frac{1}{4}\,\mu\, e^{-\mu t} + \frac{3}{4}\,(2\,\mu)\, e^{-2\mu t} \qquad t \geq 0$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der **Pollaczek-Khinchine Formel** die Zustandswahrscheinlichkeiten $p_k = \mathbb{P}(N = k)$ ($N -$ die Anzahl der Kunden im System)

6.2 Aufgabe

Betrachten wir das System $M^{[X]}/G/1$ mit Ankunft in Gruppen mit Wahrscheinlichkeit $c_n = \mathbb{P}[X_T = n]$, dass die Anzahl X_T der Kunden, die gleichzeitig eintrifft, k beträgt.

(a) Zeigen Sie, dass die erzeugte Funktion der Anzahl $N(t)$ der angekommenden im Intervall $[0,\ t]$ Kunden

$\hat{Y}(z) = e^{-\lambda t(1-C(z))}$ beträgt, wobei $C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, z^n$.

(b) Zeigen Sie, dass die erzeugte Funktion der Anzahl $V(t)$ der Ankünfte während der Bedienzeit $B = t$, kann wie folgt angegeben werden

$\hat{V}(z) = B^*(\lambda - \lambda\, C(z))$, wobei $F^*(s) := \int_0^\infty e^{-s t}\, f_B(t)\, dt$ ist die Laplace-Transformierte der Bedienzeit.

6.3 Aufgabe

Gegeben sei das System $M/G/\infty$ (die Ankömmling sieht immer einen freien Bediener und wird sofort bearbeitet, d.h. die Verteilungsfunktionen für die Bedienzeit B und für die Verweilzeit Q übereinstimmen

$$B(x) = \mathbb{P}(B < x) = \mathbb{P}(Q < x) = W(x)$$

Sei $p_k(t) = \mathbb{P}(N(t) = k)$ beschreibt die Zustandswahrscheinlichkeiten, wobei $p_0(0) = 1$ und $W = \mathbb{E}[Q] = \mathbb{E}[B]$.

(a) Beweisen Sie den Satz:

$$p_k(t) = \sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda t}\, \frac{(\lambda t)^n}{n!} \binom{n}{k} \left[\frac{1}{t}\int_0^t (1 - B(x))\, dx\right]^k \left[\frac{1}{t}\int_0^t B(x)\, dx\right]^{n-k}$$

Hinweis:

$\frac{1}{t}\int_0^t B(x)\, dx$ – die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Bedienzeit eines Benutzeres kleine t ist, unter die Bedingung, dass seiner Ankunftzeit gleichverteilt auf dem Intervall [0,t] ist.

(b) Zeigen Sie, wenn $p_k = \lim_{t\to\infty} p_k(t)$, dann gilt

$$p_k = \frac{(\lambda \mathbb{E}[B])^k}{k!}\, e^{-\lambda \mathbb{E}[B]}$$

6.4 Aufgabe

Gegeben sei das $H_2/M/1$ –Warteschlangensystem mit $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\mu = 2$ und $\alpha_1 = \frac{5}{8}$.

(a) Bestimmen Sie σ.

(b) Bestimmen Sie r_k.

(c) Bestimmen Sie $\mathbb{f}_Q(t)$

(d) Bestimmen Sie $W = \mathbb{E}[Q]$

6.5 Aufgabe

Gegeben ist ein $G/M/2$ –System. Durch die Belegung von Plätzen in der Warteschlange vor dem Server entstehen Kosten Y mit der folgenden Verteilungsdichte

$$\mathbb{c}_Y(t) = a\, e^{b\, t}$$

(a) Bestimmen Sie die mittlere Kosten $\mathbb{E}[Y]$ für die Belegung von Plätzen in der Warteschlange

(b) Unter welcher Bediengung ist die mittlere Kosten endlich.

6.6 Aufgabe

Für ein $G/M/1$ –System ist die Laplance-Transformierte der ZAZ A

$$A^*(s) = \frac{2\,\mu^2}{(s+\mu)\,(s+2\,\mu)}$$

bekannt. Berechnen Sie σ, r_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, $\mathbb{F}_{Q_q}(t)$, $\mathbb{F}_Q(t)$ und $W_q = \mathbb{E}\left[Q_q\right]$, $W = \mathbb{E}[Q]$.