§8 Parametrische Tests 2. Teil pfad

▼

```
SetDirectory[
    "C:\Dokumente und Einstellungen\Administrator\Desktop\Stochastik mit Mathematica
        6.0\Statistik\Datenordner"];

<< HypothesisTesting`;

ProbabilityTest[stich_, p0_, option_] := Module[{x, n, p},
    x = Mean[stich];
    n = Length[stich];
    p = If[x ≥ p0, Min[0.5, (1 − CDF[BinomialDistribution[n, p0], n x − 1])], Min[0.5, CDF[BinomialDistribution[n,
    If[Replace[TwoSided, option] == True, Print["TwoSidedPValue→", 2 p], Print["OneSidedPValue → ", p]]]

PoissonTest[stich_, λ0_, option_] := Module[{x, n, p},
    x = Mean[stich];
    n = Length[stich];
    p = If[x ≥ λ0, Min[0.5, (1 − CDF[PoissonDistribution[n λ0], n x − 1])], Min[0.5, CDF[PoissonDistribution[n λ0],
    If[Replace[TwoSided, option] == True, Print["TwoSidedPValue→", 2 p], Print["OneSidedPValue → ", p]]]

ExponentialTest[stich_, λ0_, option_] := Module[{x, n, p},
    x = Mean[stich];
    n = Length[stich];
    p = If[x > 1 / λ0, (1 − CDF[GammaDistribution[n, 1 / λ0], n x]), CDF[GammaDistribution[n, 1 / λ0], n x]] //
        N;
    If[Replace[TwoSided, option] == True, Print["TwoSidedPValue→", 2 p], Print["OneSidedPValue → ", p]]]

ExponentialRatioTest[xstich_, ystich_, λ0_, option_] := Module[{x, y, n, m, p},
    x = Mean[xstich];
    y = Mean[ystich];
    n = Length[xstich];
    m = Length[ystich];
    p = If[y / x < λ0, (1 − CDF[FRatioDistribution[2 n, 2 m], λ0 x / y]),
           CDF[FRatioDistribution[2 n, 2 m], λ0 x / y]] // N;
    If[Replace[TwoSided, option] == True, Print["TwoSidedPValue→", 2 p], Print["OneSidedPValue → ", p]]]
```

In diesem Kapitel befassen wir uns mit Tests für die Parameter einiger anderer wichtiger Verteilungen, wobei wir wieder sowohl Ein- als auch Zweistichprobenprobleme behandeln und dabei stets auf einseitige und zweiseitige Alternativen eingehen werden. Wir gehen dabei wieder stets von einer typischen Fragestellung aus und konstruieren dafür einen passenden Test, dessen ein- und zweiseitige Varianten wir in Form einer übersichtlichen Tabelle darstellen. Anschließend wenden wir diese Tests an konkreten Beispielen an, wobei wir wieder versuchen, die spezielle Denkweise der Testtheorie möglichst anschaulich herauszuarbeiten. Da diese Tests nur zum Teil in Mathematica implementiert sind, entwickeln wir schließlich für diese Tests eigene Mathematica-Prozeduren für die Berechnung der jeweiligen p-Werte.

8.1 Der Probability-Test für eine Grundgesamtheit

Wir beginnen mit einer typischen Fragestellung:

8.1.1 Beispiel: Man entwickle einen Test mit Signifikanz α für das Testproblem

$$\mathcal{P}_X = \{\mathcal{B}[1,\ p] \mid 0 < p < 1\}$$

$\mathcal{H}_0 = \{\mathcal{B}[1,\ p] \mid p \leq p_0\}$
$\mathcal{H}_1 = \{\mathcal{B}[1,\ p] \mid p > p_0\}$

▼

Lösung: Da die relative Häufigkeit $\mathbb{H}[A] = \overline{X}^{(n)}$ bekanntlich ein guter Schätzer für die unbekannte Wahrscheinlichkeit $p = \mathbb{P}[A]$ eines Ereignisses A ist, liegt es nahe, die Hypothese $\mathcal{H}_0$ abzulehnen, wenn $\overline{X}^{(n)}$ deutlich größer als ein gewisser Schwellwert k ist. Damit der Test T mit dem Ablehnungsbereich $\{T = 1\} = \{\overline{X}^{(n)} > k\}$ das Signifikanzniveau α besitzt, muss dieser Schwellwert k so gewählt werden, dass für alle $p \leq p_0$

$$\mathbb{P}[\{\overline{X}^{(n)} > k\};\ \mathcal{B}[1,\ p]] \leq \alpha$$

ist. Nun gilt aber für alle $p \leq p_0$ aufgrund der Faltungsformeln

$$\mathbb{P}[\{\overline{X}^{(n)} > k\};\ \mathcal{B}[1,\ p]] = \mathbb{P}[\{\sum_{i=1}^{n} X_i > n\,k\};\ \mathcal{B}[1,\ p]] = 1 - B_{n,p}[n\,k] \leq 1 - B_{n,p_0}[n\,k]$$

wobei $B_{n,p}$ die Verteilungsfunktion der $\mathcal{B}[n,\ p]]$-Verteilung bezeichnet und wir berücksichtigt haben, dass für alle $p \leq p_0$ stets die Ungleichung $B_{n,p}[z] \geq B_{n,p_0}[z]$ gilt. Da die beiden Aussagen

$$1 - B_{n,p_0}[z] \leq \alpha \qquad \text{und} \qquad z \geq b_{n,p_0;1-\alpha}$$

offenbar gleichbedeutend sind (mit $b_{n,p;q}$ bezeichnen wir das q-Quantil der $\mathcal{B}[n,\ p]$-Verteilung), besitzt der Test T für die Hypothese $\mathcal{H}_0$ gegen die Alternative $\mathcal{H}_1$ mit dem Ablehnungsbereich

$$\{T = 1\} = \{n\,\overline{X}^{(n)} > b_{n,p_0;1-\alpha}\}$$

das Signifikanzniveau α. Man beachte dabei, wie das q-Quantil einer diskreten Verteilung definiert ist.

8.1.2 Der Probability-Test: Der Probability-Test für eine Grundgesamtheit wird verwendet, wenn eine Hypothese über die Wahrscheinlichkeit p eines Ereignisses A getestet werden soll:

$\mathbb{P}_X$	$\mathcal{H}_0$	$\mathcal{H}_1$	Ablehnungsbereich
$\{\mathcal{B}[1,\ p] \mid 0 < p < 1\}$	$p = p_0$	$p \neq p_0$	$n\,\overline{X}^{(n)} \leq b_{n,p_0;\alpha/2} \vee n\,\overline{X}^{(n)} > b_{n,p_0;1-\alpha/2}$
	$p \leq p_0$	$p > p_0$	$n\,\overline{X}^{(n)} > b_{n,p_0;1-\alpha}$
	$p \geq p_0$	$p < p_0$	$n\,\overline{X}^{(n)} \leq b_{n,p_0;\alpha}$

Dabei bezeichnet $b_{n,p;q}$ das q-Quantil der $\mathcal{B}[n,\ p]$-Verteilung und $\overline{X}^{(n)}$ die relative Häufigkeit von A.

Es folgen einige Beispiele, mit denen gezeigt wird, wie dieser Test in der Praxis angewendet wird:

8.1.3 Beispiel: Um die hellseherischen Fähigkeiten einer Versuchsperson zu überprüfen, bekam sie die Aufgabe, die von einem Zufallszahlengenerator mit gleicher Wahrscheinlichkeit erzeugten Zeichen ■, ●, ▲, ✸ zu erraten. Dabei erzielte die Versuchsperson bei $n = 116$ Versuchen $n\,\overline{x} = 41$ Treffer. Kann man aufgrund dieses Ergebnisses behaupten, dass diese Person hellseherische Fähigkeiten besitzt, wenn man sich mit dieser Entscheidung in höchstens einem von hundert gleich gelagerten Fällen blamieren will.

▼

Lösung: Die Zufallsvariable X sei gleich 1 bzw 0 je nachdem, ob die Versuchsperson das vom Zufallszahlengenerator erzeugte Zeichen errät bzw nicht errät. Besitzt die Versuchsperson keinerlei parapsychologische Fähigkeiten, so gilt offenbar $\mathbb{P}_X = \mathcal{B}[1,\ 1/4]$. Besitzt die Versuchsperson hingegen hellseherische Fähigkeiten, so wird X einer $\mathcal{B}[1,\ p]$-Verteilung mit $p > 1/4$ genügen. Wir haben es also mit dem einseitigen Testproblem

$$\mathcal{P}_X = \{\mathcal{B}[1,\ p] \mid 0 < p < 1\}$$
$$\mathcal{H}_0 = \{\mathcal{B}[1,\ p] \mid p \leq p_0\}$$
$$\mathcal{H}_1 = \{\mathcal{B}[1,\ p] \mid p > p_0\}$$

mit $p_0 = 1/4$ zu tun, wobei eine Stichprobe $\vec{x}$ vom Umfang $n = 116$ mit $n\,\overline{x} = 41$ vorliegt. Für dieses Testproblem ist der einseitige Probability-Test geeignet. Wie die folgende Rechnung zeigt, wird die Hypothese $\mathcal{H}_0$ beim Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$ (nur in einem von 100 gleich gelagerten Fällen erlauben wir eine Fehlentscheidung 1. Art) abgelehnt.

```
p0 = 1/4; n = 116; xmean = 41/n; α = 0.01;
If[n xmean > Quantile[BinomialDistribution[n, p0], 1 − α],
  Print["Reject null hypothesis at significance level α −> ", α],
  Print["Fail to reject null hypothesis at significance level α −> ",  α]]
Clear[p0, n, xmean, α]
```

```
Reject null hypothesis at significance level α -> 0.01
```

Es ist erstaunlich, dass bereits 41 Treffer (das sind nur geringfügig mehr als jene 29 Treffer, die auch ohne hellseherische Fähigkeit durchschnittlich erzielt werden) so signifikant auf hellseherische Fähigkeiten schließen lassen.

8.1.4 Beispiel: Ab wieviel fehlerhaften Stücken kann bei einer Stichprobe vom Umfang $n = 400$ behauptet werden, dass der prozentuelle Ausschuss signifikant ($\alpha = 0.01$) höher als 5 % ist?

▼

Lösung: Die Zufallsvariable X sei gleich 1 bzw 0 je nachdem, ob das ausgewählte Stück fehlerhaft oder fehlerfrei ist. Wir haben es also mit dem einseitigen Testproblem

$$\mathcal{P}_X = \{\mathcal{B}[1,\ p] \mid 0 < p < 1\}$$
$$\mathcal{H}_0 = \{\mathcal{B}[1,\ p] \mid p \leq p_0\}$$
$$\mathcal{H}_1 = \{\mathcal{B}[1,\ p] \mid p > p_0\}$$

mit $p_0 = 0.05$ zu tun, wobei eine Stichprobe $\vec{x}$ vom Umfang $n = 400$ vorliegt. Für dieses Testproblem ist der einseitige Probability-Test geeignet. Damit die Hypothese $\mathcal{H}_0$ signifikant abgelehnt wird, muss die Anzahl $n\,\overline{x}$ der fehlerhaften Stücke also größer als das $(1-\alpha)$-Quantil der $\mathcal{B}[n,\ p_0]$-Verteilung sein, welches sich mit *Mathematica* mühelos berechnen lässt:

```
p0 = 0.05; n = 400; α = 0.01;
Quantile[BinomialDistribution[n, p0], 1 − α]
Clear[p0, n, α]
```

```
31
```

Der Probability-Test lässt sich in *Mathematica* leicht implementieren (wobei wir uns darauf beschränken, nur den p-Wert auszugeben, da in diesem p-Wert ohnehin die gesamte Information enthalten ist):

■ ProbabilityTest[*stich*, p_0, TwoSided → True]

berechnet für die Stichprobe *stich* den p-Wert des zweiseitigen Probability-Tests für die Hypothese $p = p_0$ gegen die Alternative $p \neq p_0$.

Soll für die Stichprobe *stich* der p-Wert des einseitigen Probability-Tests berechnet werden, so verwende man die Option TwoSided → False. Dabei wird im Fall $\overline{x} > p_0$ die Hypothese $p \leq p_0$ gegen die Alternative $p > p_0$ und im Fall $\overline{x} < p_0$ die Hypothese $p \geq p_0$ gegen die Alternative $p < p_0$ getestet.

8.1.5 Beispiel: In Beispiel 21.2.5 haben wir die Frage behandelt, warum der Lehrer dem faulen Schüler Max auf die Schliche kam. Wir wollen nun das seinerzeit von Max abgegebene Datenmaterial *max* unter Verwendung des Probability-Tests analysieren.

▼

Lösung: Der Lehrer glaubt, dass Max geschwindelt hat, da die Anzahl der Adler (symbolisiert durch eine 1) verdächtig hoch ist. Für den Lehrer liegt damit das Testproblem

$$\mathcal{P}_X = \{\mathcal{B}[1,\ p] \mid 0 < p < 1\}$$

$$\mathcal{H}_0 = \{\mathcal{B}[1,\ p] \mid p = p_0\}$$

$$\mathcal{H}_1 = \{\mathcal{B}[1,\ p] \mid p > p_0\}$$

mit $p_0 = 0.5$ vor, wofür der einseitige Probability-Test geeignet ist. Nun liefert aber der Befehl ProbabilityTest

```
ProbabilityTest[Rest[<< maxfile], 0.5, TwoSided → False]
```

```
OneSidedPValue → 0.0300136
```

den p-Wert $p = 0.03$. Die Hypothese $\mathcal{H}_0$, dass Max nicht gechwindelt hat, ist daher zu verwerfen.

8.2 Der Probability-Test für zwei Grundgesamtheiten

Ausgangspunkt ist wieder eine typischen Fragestellung:

8.2.1 Beispiel: Man entwickle einen Test mit Signifikanz α für das Testproblem

$$\mathcal{P}_X \times \mathcal{P}_Y = \{\{\mathcal{B}[1,\ p_x],\ \mathcal{B}[1,\ p_y]\} \mid 0 < p_x,\ p_y < 1\}$$

$$\mathcal{H}_0 = \{\{\mathcal{B}[1,\ p_x],\ \mathcal{B}[1,\ p_y]\} \mid p_x \le p_y\}$$

$$\mathcal{H}_1 = \{\{\mathcal{B}[1,\ p_x],\ \mathcal{B}[1,\ p_y]\} \mid p_x > p_y\}$$

▼

Lösung: Die relativen Häufigkeiten $\mathbb{H}[A] = \overline{X}^{(n)}$ bzw $\mathbb{H}[B] = \overline{Y}^{(m)}$sind bekanntlich gute Schätzer für die unbekannten Wahrscheinlichkeiten $p_x = \mathbb{P}[A]$ bzw $p_y = \mathbb{P}[B]$ der Ereignisse A bzw B. Es liegt daher nahe, die Hypothese $\mathcal{H}_0$ dann abzulehnen, wenn sich $\overline{X}^{(n)}$ und $\overline{Y}^{(m)}$ deutlich voneinander unterscheiden. Damit der Test T mit dem Ablehnungsbereich $\{T = 1\} = \{\overline{X}^{(n)} - \overline{Y}^{(m)} > k\}$ das Signifikanzniveau α besitzt, muss der Schwellwert k dabei so gewählt werden, dass für alle $p_x \le p_y$

$$\mathbb{P}[\{\overline{X}^{(n)} - \overline{Y}^{(m)} > k\};\{\mathcal{B}[1,\ p_x],\ \mathcal{B}[1,\ p_y]\}] \le \alpha$$

gilt. Aus dem zentralen Grenzverteilungssatz zusammen mit der Faltungsformel für Normalverteilungen folgt aber, dass für große Werte von n und m die Statistik $\overline{X}^{(n)}$ annähernd $\mathcal{N}[p_x,\ \sigma_x]$-verteilt und die Statistik $\overline{Y}^{(m)}$ annähernd $\mathcal{N}[p_y,\ \sigma_y]$-verteilt ist, wobei

$$\sigma_x = \sqrt{p_x\ (1 - p_x)/n} \quad \text{und} \quad \sigma_y = \sqrt{p_y\,(1 - p_y)/m}$$

gilt. Damit ist aber die Statistik $\overline{X}^{(n)} - \overline{Y}^{(m)}$ annähernd $\mathcal{N}[\mu_{x,y},\ \sigma_{x,y}]$-verteilt mit den Parametern

$$\mu_{x,y} = p_x - p_y \quad \text{und} \quad \sigma_{x,y} = \sqrt{{\sigma_x}^2 + {\sigma_y}^2}$$

Für alle $p_x \leq p_y$ gilt somit

$$\mathbb{P}[\{\overline{X}^{(n)} - \overline{Y}^{(m)} > k\}; \{\mathcal{B}[1,\ p_x],\ \mathcal{B}[1,\ p_y]\}] \approx 1 - N_{\mu_{x,y},\sigma_{x,y}}[k] \leq 1 - N_{0,\sigma_{x,y}}[k] = 1 - \phi[k/\sigma_{x,y}]$$

wobei $N_{\mu,\sigma}$ die Verteilungsfunktion der $\mathcal{N}[\mu,\ \sigma]$-Verteilung und ϕ die Verteilungsfunktion der $\mathcal{N}[0,\ 1]$-Verteilung bezeichnet. Berücksichtigt man nun einerseits, dass die beiden Aussagen

$$1 - \phi[k/\sigma_{x,y}] \leq \alpha \qquad \text{und} \qquad k \geq \sigma_{x,y}\, n_{1-\alpha}$$

gleichbedeutend sind und andererseits die Statistik

$$S_{X,Y}^{(n,m)} = \sqrt{\overline{X}^{(n)}(1 - \overline{X}^{(n)})/n + \overline{Y}^{(m)}(1 - \overline{Y}^{(m)})/m}$$

offenbar ein guter Schätzer für den unbekannten Parameter $\sigma_{x,y}$ ist, so besitzt der Test T für die Hypothese $\mathcal{H}_0$ gegen die Alternative $\mathcal{H}_1$ mit dem Ablehnungsbereich

$$\{Z = 1\} = \{(\overline{X}^{(n)} - \overline{Y}^{(m)})/S_{X,Y}^{(n,m)} > n_{1-\alpha}\}$$

(annähernd) das Signifikanzniveau α.

8.2.2 Der Probability-Test: Der Probability-Test für zwei Grundgesamtheiten wird verwendet, wenn die Wahrscheinlichkeiten p_x und p_y der beiden Ereignisse A und B verglichen werden sollen und die Stichprobe-numfänge n und m groß sind (für die Praxis genügt es, wenn $n,\ m \geq 12$ sind):

$\mathbb{P}_X \times \mathbb{P}_Y$	$\mathcal{H}_0$	$\mathcal{H}_1$	Ablehnungsbereich
$\{\{\mathcal{B}[1,\ p_x],\ \mathcal{B}[1,\ p_y]\} \mid 0 < p_x,\ p_y < 1\}$	$p_x - p_y = p_0$	$p_x - p_y \neq p_0$	$\dfrac{\lvert\overline{X}^{(n)} - \overline{Y}^{(m)} - p_0\rvert}{S_{X,Y}^{(n,m)}} > n_{1-\alpha/2}$
	$p_x - p_y \leq p_0$	$p_x - p_y > 0$	$\dfrac{\overline{X}^{(n)} - \overline{Y}^{(m)} - p_0}{S_{X,Y}^{(n,m)}} > n_{1-\alpha}$
	$p_x - p_y \geq p_0$	$p_x - p_y < p_0$	$\dfrac{\overline{X}^{(n)} - \overline{Y}^{(m)} - p_0}{S_{X,Y}^{(n,m)}} < n_{\alpha}$

Dabei bezeichnet n_q das q-Quantil der $\mathcal{N}[0,\ 1]$-Verteilung, $\overline{X}^{(n)}$ bzw $\overline{Y}^{(m)}$ die relativen Häufigkeiten der beiden Ereignisse A bzw B und $S_{X,Y}^{(n,m)}$ die Statistik

$$S_{X,Y}^{(n,m)} = \sqrt{\overline{X}^{(n)}\,(1 - \overline{X}^{(n)})/n + \overline{Y}^{(m)}\,(1 - \overline{Y}^{(m)})/m}$$

▼

Da bei der Ermittlung der Verteilung der Teststatistik Approximationen verwendet wurden, besitzt der Probability-Test für zwei Grundgesamtheiten nur annähernd das vorgegebene Signifikanzniveau α.

An einem Beispiel zeigen wir wieder, wie dieser Test in der Praxis verwendet wird:

8.2.3 Beispiel: Kann man auf Grund der Tatsache, dass von $n = 253$ befragten Studenten einer technischen Studienrichtung $a = 75$ ihre Reifeprüfung mit Auszeichnung abgelegt haben während von $m = 418$ Studenten einer wirtschaftswissenschaftlichen Studienrichtung nur $b = 58$ ein ausgezeichnetes Reifezeugnis vorweisen konnten, signifikant darauf schließen, dass der Anteil jener Studenten, welche mit Auszeichnung maturieren, in der technischen Studienrichtung um mindestens 10% höher ist als in der wirtschaftswissenschaftlichen Studienrichtung?

▼

Lösung: Die Zufallsvariablen X bzw Y beschreiben, ob ein zufällig ausgewählter Student der technischen bzw der wirtschaftswissenschaftlichen Studienrichtung seine Reifeprüfung mit Auszeichnung abgelegt hat. Da die Zufallsvariablen X und Y nur die beiden Werte 1 und 0 annehmen können (wobei "1" für das Ereignis "Reifeprüfung mit Auszeichnung bestanden" steht), haben wir es mit dem einseitigen Testproblem

$$\mathcal{P}_X \times \mathcal{P}_Y = \{\{\mathcal{B}[1,\ p_x],\ \mathcal{B}[1,\ p_y]\} \mid 0 < p_x,\ p_y < 1\}$$

$$\mathcal{H}_0 = \{\{\mathcal{B}[1,\ p_x],\ \mathcal{B}[1,\ p_y]\} \mid p_x - p_y \leq p_0\}$$

$$\mathcal{H}_1 = \{\{\mathcal{B}[1,\ p_x],\ \mathcal{B}[1,\ p_y]\} \mid p_x - p_y > p_0\}$$

mit $p_0 = 0.1$ zu tun, wobei eine Stichprobe $\vec{x}$ vom Umfang $n = 253$ mit $a = n\,\overline{x} = 75$ und eine Stichprobe $\vec{y}$ vom Umfang $m = 418$ mit $b = m\,\overline{y} = 58$ vorliegt. Da die Stichprobenumfänge n und m groß sind, können wir für dieses Testproblem den einseitigen Probability-Test für zwei Grundgesamtheiten verwenden. Wie die folgende Rechnung zeigt, wird die Hypothese $\mathcal{H}_0$ zwar beim Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ nicht aber beim Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$ abgelehnt:

```
p0 = 0.1; n = 253; xmean = 75/n; m = 418; ymean = 58/m; α = 0.05;
s = Sqrt[xmean (1 - xmean)/n + ymean (1 - ymean)/m];
If[(xmean - ymean - p0)/s > Quantile[NormalDistribution[0, 1], 1 - α],
  Print["Reject null hypothesis at significance level α -> ", α],
  Print["Fail to reject null hypothesis at significance level α -> ", α]]
Clear[p0, n, xmean, m, ymean, α, s]
```

```
Reject null hypothesis at significance level α -> 0.05
```

Man kann also einigermaßen signifikant behaupten, dass der Anteil jener Studenten, welche mit Auszeichnung maturieren, in der technischen Studienrichtung um mindestens 10% höher ist als in der wirtschaftswissenschaftlichen Studienrichtung.

Natürlich könnte man den Probability-Test für zwei Grundgesamtheiten leicht in *Mathematica* implementieren. Da jedoch der modifizierte t-Test für zwei Grundgesamtheiten stets zu ganz ähnlichen Ergebnissen führt, wollen wir darauf verzichten und statt dessen ein konkretes Beispiel behandeln:

8.2.4 Beispiel: Zufällig ausgewählte deutsche bzw italienische Hausfrauen wurden befragt, ob sie das Waschmittel X gegen das Waschmittel Y eintauschen würden (dabei bedeutet 1 die Antwort "ja" und 0 die Antwort "nein"). Kann man aufgrund des bei dieser Umfrage erhaltenen Datenmaterials *waschmittel* davon ausgehen, dass diese beiden Waschmittel in Deutschland und Italien gleichermaßen beliebt sind?

▼

Lösung: Wir lesen das im Datenordner abgelegte Datenfile *waschmittelfile* ein, wählen mit Hilfe von Cases und Part die Antworten der deutschen bzw italienischen Hausfrauen aus und bezeichnen diese Stichproben mit "deutschland" bzw "italien". Mit Hilfe von Mean ermitteln wir zuerst die Wahrscheinlichkeiten, mit denen eine deutsche bzw italienische Hausfrau das Waschmittel X gegen das Waschmittel Y eintauschen würde:

```
deutschland = Part[Cases[<< waschmittelfile, {x_, Deutschland, y_}], All, 3];
italien = Part[Cases[<< waschmittelfile, {x_, Italien, y_}], All, 3];
{Mean[deutschland], Mean[italien]} // N
```

```
{0.614634, 0.683673}
```

Wir wollen nun überprüfen, ob dieser Unterschied der beiden Wahrscheinlichkeiten signifikant ist. Dazu wenden wir auf die beiden Stichproben den Befehl MeanDifferenceTest in der Form des modifizierten t-Tests für zwei Grundgesamtheiten an:

```
MeanDifferenceTest[deutschland, italien, 0, TwoSided → False]
Clear[deutschland, italien]
```

```
OneSidedPValue → 0.0155153
```

Bei dieser Befragung ergab sich also, dass italienische Hausfrauen das Waschmittel X signifikant lieber gegen das Waschmittel Y eintauschen würden als deutsche Hausfrauen.

8.3 Der Poissontest für eine Grundgesamtheit

Zunächst wieder eine typische Fragestellung:

8.3.1 Beispiel: Man entwickle einen Test mit Signifikanz α für das Testproblem

$$\mathbb{P}_X = \{\mathcal{P}[\lambda] \mid \lambda > 0\}$$
$$\mathcal{H}_0 = \{\mathcal{P}[\lambda] \mid \lambda \leq \lambda_0\}$$
$$\mathcal{H}_1 = \{\mathcal{P}[\lambda] \mid \lambda > \lambda_0\}$$

▼

Lösung: Da bekanntlich der Mittelwert $\overline{X}^{(n)}$ ein guter Schätzer für den unbekannten Erwartungswert $\mathbb{E}[X] = \lambda$ einer poissonverteilten Zufallsvariablen X ist, liegt es nahe, die Hypothese $\mathcal{H}_0$ abzulehnen, wenn $\overline{X}^{(n)}$ deutlich größer als ein gewisser Schwellwert k ist. Damit der Test T mit dem Ablehnungsbereich $\{T = 1\} = \{\overline{X}^{(n)} > k\}$ das Signifikanzniveau α besitzt, muss dieser Schwellwert k so gewählt werden, dass für alle $\lambda \leq \lambda_0$ die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}[\{T = 1\}; \mathcal{P}[\lambda]] = \mathbb{P}[\{\overline{X}^{(n)} > k\}; \mathcal{P}[\lambda]]$$

durch α beschränkt ist. Nun gilt aber für alle $\lambda \leq \lambda_0$ (Faltungsformel für Poissonverteilungen)

$$\mathbb{P}[\{\overline{X}^{(n)} > k\}; \mathcal{P}[\lambda]] = \mathbb{P}[\{\sum_{i=1}^{n} X_i > n\,k\}; \mathcal{P}[\lambda]] = 1 - P_{n\,\lambda}[n\,k] \leq 1 - P_{n\,\lambda_0}[n\,k]$$

wobei P_λ die Verteilungsfunktion der $\mathcal{P}[\lambda]$-Verteilung bezeichnet und wir berücksichtigt haben, dass für alle $\lambda \leq \lambda_0$ stets die Ungleichung $P_\lambda[z] \geq P_{\lambda_0}[z]$ gilt. Da die beiden Aussagen

$$1 - P_{n\,\lambda_0}[n\,k] \leq \alpha \qquad \text{und} \qquad n\,k \geq p_{n\,\lambda_0;1-\alpha}$$

offenbar gleichbedeutend sind (mit $p_{\lambda;q}$ bezeichnen wir das q-Quantil der $\mathcal{P}[\lambda]$-Verteilung), besitzt der Test T für die Hypothese $\mathcal{H}_0$ gegen die Alternative $\mathcal{H}_1$ mit dem Ablehnungsbereich

$$\{T = 1\} = \{n\,\overline{X}^{(n)} > p_{n\,\lambda_0;1-\alpha}\}$$

das Signifikanzniveau α.

8.3.2 Der Poissontest: Der Poissontest für eine Grundgesamtheit wird verwendet, wenn eine Hypothese über den Erwartungswert λ einer poissonverteilten Grundgesamtheit getestet werden soll:

$\mathfrak{P}_X$	$\mathcal{H}_0$	$\mathcal{H}_1$	Ablehnungsbereich
$\{\mathcal{P}[\lambda] \mid \lambda > 0\}$	$\lambda = \lambda_0$	$\lambda \neq \lambda_0$	$n\,\overline{X}^{(n)} \leq p_{n\,\lambda_0;\alpha/2} \vee n\,\overline{X}^{(n)} > p_{n\,\lambda_0;1-\alpha/2}$
	$\lambda \leq \lambda_0$	$\lambda > \lambda_0$	$n\,\overline{X}^{(n)} > p_{n\,\lambda_0;1-\alpha}$
	$\lambda \geq \lambda_0$	$\lambda < \lambda_0$	$n\,\overline{X}^{(n)} \leq p_{n\,\lambda_0;\alpha}$

Dabei bezeichnet $p_{\lambda;q}$ das q-Quantil der $\mathcal{P}[\lambda]$-Verteilung.

Es folgen wieder einige Beispiele:

8.3.3 Beispiel: In Militärkreisen wird behauptet, dass die durchschnittliche Anzahl der weiblichen Nachkommen von Kampfpiloten deutlich höher ist, als die durchschnittliche Anzahl der weiblichen Nachkommen in der Gesamtbevölkerung. Man überprüfe diese Aussage, wenn $n = 110$ zufällig ausgewählte Kampfpiloten der US Airforce insgesamt $a = 60$ Töchter hatten, während Amerikaner im Durchschnitt nur $\lambda_0 = 0.45$ weibliche Nachkommen aufweisen.

▼

Lösung: Wir können annehmen, dass die Anzahl X der weiblichen Nachkommen von Kampfpiloten poissonverteilt ist. Damit haben wir es mit dem einseitigen Testproblem

$$\mathfrak{P}_X = \{\mathcal{P}[\lambda] \mid \lambda > 0\}$$
$$\mathcal{H}_0 = \{\mathcal{P}[\lambda] \mid \lambda \leq \lambda_0\}$$
$$\mathcal{H}_1 = \{\mathcal{P}[\lambda] \mid \lambda > \lambda_0\}$$

mit $\lambda_0 = 0.45$ zu tun, für das eine Stichprobe $\vec{x}$ vom Umfang $n = 110$ mit $a = n\,\overline{x} = 60$ vorliegt. Für dieses Testproblem ist der einseitige Poissontest geeignet. Wie die folgende Rechnung zeigt, wird die Hypothese $\mathcal{H}_0$ beim Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ nicht abgelehnt:

```
λ0 = 0.45; n = 110; xmean = 60 / n; α = 0.05;
If[n xmean > Quantile[PoissonDistribution[n λ0], 1 − α],
  Print["Reject null hypothesis at significance level α −> ", α],
  Print["Fail to reject null hypothesis at significance level α −> ", α]]
Clear[λ0, n, xmean, α]
```

```
Fail to reject null hypothesis at significance level α -> 0.05
```

Die in Militärkreisen aufgestellte Behauptung, wonach Kampfpiloten im Durchschnitt deutlich mehr Töchter haben als in der Bevölkerung üblich, kann aufgrund der vorliegenden Stichprobe somit nicht bestätigt werden.

8.3.4 Beispiel: Bisher muss man in Österreich mit durchschnittlich 750 Verkehrstoten pro Jahr rechnen. Die Befürworter von "Licht am Tag" behaupten, dass sich durch diese Maßnahme die Anzahl der Verkehrstoten signifikant um durchschnittlich 10% verringern wird, die durchschnittliche Anzahl der Verkehrstoten pro Jahr also auf 675 zurückgehen wird. Falls diese Behauptung stimmt, so dürften in den nächsten $n = 5$ Jahren pro Jahr im Durchschnitt nur wieviele Personen bei Verkehrsunfällen ums Leben kommen?

▼

Lösung: Wir können annehmen, dass die Anzahl X der in einem Jahr bei Verkehrsunfällen ums Leben kommenden Personen poissonverteilt ist. Damit haben wir es mit dem einseitigen Testproblem

$$\mathfrak{P}_X = \{\mathcal{P}[\lambda] \mid \lambda > 0\}$$

$$\mathcal{H}_0 = \{\mathcal{P}[\lambda] \mid \lambda \geq \lambda_0\}$$
$$\mathcal{H}_1 = \{\mathcal{P}[\lambda] \mid \lambda < \lambda_0\}$$

mit $\lambda_0 = 675$ zu tun. Die Hypothese $\mathcal{H}_0$ wird offenbar dann signifikant abgelehnt (die Befürworter von "Licht am Tag" haben recht), wenn

$$n\,\overline{X}^{(n)} \leq p_{n\,\lambda_0;\alpha}$$

ist. Wählt man als Signifikanzniveau den Wert $\alpha = 0.05$, so heißt das wegen

```
n = 5; λ0 = 675; α = 0.05;
N[Quantile[PoissonDistribution[n λ0], α] / n]
Clear[n, λ0, α]
```

```
656.
```

dass in den nächsten $n = 5$ Jahren pro Jahr durchschnittlich nur maximal 656 Personen bei Verkehrsunfällen ums Leben kommen dürften.

Der Poissontest lässt sich in *Mathematica* natürlich leicht implementieren:

■ PoissonTest[*stich*, λ_0, TwoSided → True]

berechnet für die Stichprobe *stich* den *p*-Wert des zweiseitigen Poissontests für die Hypothese $\lambda = \lambda_0$ gegen die Alternative $\lambda \neq \lambda_0$.

Soll für die Stichprobe *stich* der *p*-Wert des einseitigen Poissontests berechnet werden, so verwende man die Option TwoSided → False. Dabei wird im Fall $\overline{x} > \lambda_0$ die Hypothese $\lambda \leq \lambda_0$ gegen die Alternative $\lambda > \lambda_0$ und im Fall $\overline{x} < \lambda_0$ die Hypothese $\lambda \geq \lambda_0$ gegen die Alternative $\lambda < \lambda_0$ getestet.

8.3.5 Beispiel: Ein Arbeiter hat die Aufgabe, je Schicht genau $N = 600$ Stücke eines gewissen Produktes herzustellen. Die Firma geht davon aus, dass davon durchschnittlich $a = 15$ Stücke Ausschuss sind. Kann signifikant behauptet werden, dass ein Arbeiter diese Vorgabe nicht erfüllt, wenn er die im Datenmaterial *fehler* aufgelistete Kontrollkarte vorlegt, aus der hervorgeht, dass er während der letzten $n = 50$ Schichten durchschnittlich 15.96 Stücke Ausschuss produziert hat?

▼

Lösung: Wir lesen das im Datenordner abgelegte Datenfile *fehlerfile* ein, rufen davon die zweite Spalte auf, streichen wie üblich die erste Zeile mit dem Namen der Variablen und wenden auf diese Stichprobe den Befehl PoissonTest an (wir verwenden dabei implizit, dass die Anzahl der während einer Schicht produzierten fehlerhaften Stücke poissonverteilt ist):

```
λ0 = 15;
PoissonTest[Rest[Part[<< fehlerfile, All, 2]], λ0, TwoSided → False]
Clear[λ0]
```

```
OneSidedPValue → 0.042477
```

Dieses Ergebnis zeigt, dass die von diesem Arbeiter erbrachte Leistung die Vorgabe der Firma verfehlt.

8.4 Der Poissontest für zwei Grundgesamtheiten

Zu Beginn wieder eine typische Fragestellung:

8.4.1 Beispiel: Man entwickle einen Test mit Signifikanz α für das Testproblem

$$\mathbb{P}_X \times \mathbb{P}_Y = \{\{\mathcal{P}[\lambda_x], \mathcal{P}[\lambda_y]\} \mid \lambda_x, \lambda_y > 0\}$$
$$\mathcal{H}_0 = \{\{\mathcal{P}[\lambda_x], \mathcal{P}[\lambda_y]\} \mid \lambda_x \geq \lambda_y\}$$
$$\mathcal{H}_1 = \{\{\mathcal{P}[\lambda_x], \mathcal{P}[\lambda_y]\} \mid \lambda_x < \lambda_y\}$$

▼

Lösung: Da bekanntlich die Mittelwerte $\overline{X}^{(n)}$ bzw $\overline{Y}^{(m)}$ gute Schätzer für die beiden unbekannten Erwartungswerte $\mathbb{E}[X] = \lambda_x$ bzw $\mathbb{E}[Y] = \lambda_y$ der poissonverteilten Zufallsvariablen X bzw Y sind, liegt es nahe, die Hypothese $\mathcal{H}_0$ dann abzulehnen, wenn $\overline{X}^{(n)}$ deutlich kleiner als $\overline{Y}^{(m)}$ ist. Damit der Test T mit dem Ablehnungsbereich $\{T = 1\} = \{\overline{X}^{(n)} - \overline{Y}^{(m)} < k\}$ das Signifikanzniveau α besitzt, muss der Schwellwert k so gewählt werden, dass im Fall $\lambda_x \geq \lambda_y$ stets

$$\mathbb{P}[\{\overline{X}^{(n)} - \overline{Y}^{(m)} < k\}; \{\mathcal{P}[\lambda_x], \mathcal{P}[\lambda_y]\}] \leq \alpha$$

gilt. Aus dem zentralen Grenzverteilungssatz zusammen mit der Faltungsformel für Normalverteilungen folgt aber, dass für große Werte von n und m die Statistik $\overline{X}^{(n)} - \overline{Y}^{(m)}$ mit den Parametern

$$\mu_{x,y} = \lambda_x - \lambda_y \qquad \text{und} \qquad \sigma_{x,y} = \sqrt{\lambda_x / n + \lambda_y / m}$$

annähernd $\mathcal{N}[\mu_{x,y}, \sigma_{x,y}]$-verteilt ist. Für alle $\lambda_x \geq \lambda_y$ gilt damit

$$\mathbb{P}[\{\overline{X}^{(n)} - \overline{Y}^{(m)} < k\}; \{\mathcal{P}[\lambda_x], \mathcal{P}[\lambda_y]\}] \approx N_{\mu_{x,y}, \sigma_{x,y}}[k] \leq N_{0, \sigma_{x,y}}[k] = \phi[k / \sigma_{x,y}]$$

wobei $N_{\mu,\sigma}$ die Verteilungsfunktion der $\mathcal{N}[\mu, \sigma]$-Verteilung und ϕ die Verteilungsfunktion der $\mathcal{N}[0, 1]$-Verteilung bezeichnet. Berücksichtigt man nun einerseits, dass die beiden Aussagen

$$\phi[k / \sigma_{x,y}] \leq \alpha \qquad \text{und} \qquad k \leq \sigma_{x,y}\, n_\alpha$$

gleichbedeutend sind und andererseits die Statistik

$$S_{X,Y}^{(n,m)} = \sqrt{\overline{X}^{(n)} / n + \overline{Y}^{(m)} / m}$$

offenbar ein guter Schätzer für den unbekannten Parameter $\sigma_{x,y}$ ist, so besitzt der Test T für die Hypothese $\mathcal{H}_0$ gegen die Alternative $\mathcal{H}_1$ mit dem Ablehnungsbereich

$$\{Z = 1\} = \{(\overline{X}^{(n)} - \overline{Y}^{(m)}) / S_{X,Y}^{(n,m)} < n_\alpha\}$$

(annähernd) das Signifikanzniveau α.

8.4.2 Der Poissontest: Der **Poissontest** für zwei Grundgesamtheiten wird verwendet, wenn die Erwartungswerte λ_x und λ_y zweier poissonverteilter Grundgesamtheiten verglichen werden sollen und die Stichprobenumfänge n und m groß sind (für die Praxis genügt es, wenn $n, m \geq 12$ sind):

$\wp_X \times \wp_Y$	$\mathcal{H}_0$	$\mathcal{H}_1$	Ablehnungsbereich
$\{\{\mathcal{P}[\lambda_x], \mathcal{P}[\lambda_y]\} \mid \lambda_x, \lambda_y > 0\}$	$\lambda_x - \lambda_y = \lambda_0$	$\lambda_x - \lambda_y \neq \lambda_0$	$\lvert \overline{X}^{(n)} - \overline{Y}^{(m)} - \lambda_0 \rvert / S_{X,Y}^{(n,m)} > n_{1-\alpha/2}$
	$\lambda_x - \lambda_y \leq \lambda_0$	$\lambda_x - \lambda_y > \lambda_0$	$(\overline{X}^{(n)} - \overline{Y}^{(m)} - \lambda_0) / S_{X,Y}^{(n,m)} > n_{1-\alpha}$
	$\lambda_x - \lambda_y \geq \lambda_0$	$\lambda_x - \lambda_y < \lambda_0$	$(\overline{X}^{(n)} - \overline{Y}^{(m)} - \lambda_0) / S_{X,Y}^{(n,m)} < n_\alpha$

Dabei bezeichnet n_q das q-Quantil der $\mathcal{N}[0, 1]$-Verteilung und $S_{X,Y}^{(n,m)}$ die Statistik

$$S_{X,Y}^{(n,m)} = \sqrt{\overline{X}^{(n)} / n + \overline{Y}^{(m)} / m}$$

▼

Da bei der Ermittlung der Verteilung der Teststatistik Approximationen verwendet wurden, besitzt der Poissontest für zwei Grundgesamtheiten nur annähernd das vorgegebene Signifikanzniveau α.

Es folgt wieder ein recht aussagekräftiges Beispiel:

8.4.3 Beispiel: Im ersten Halbjahr 1992 (also vor der Einführung der Geschwindigkeitsbeschränkung von 80 km/h auf Bundesstraßen) gab es in Tirol $a = 35$ Verkehrstote. Im Jahr 1993 (also nach der Einführung dieser Geschwindigkeitsbeschränkung) gab es in Tirol insgesamt nur $b = 60$ Verkehrstote. Hat die Einführung der Geschwindigkeitsbeschränkung die Anzahl der Verkehrstoten signifikant verringert? Wie viele Verkehrstote hätte es im Jahr 1993 maximal geben dürfen, um bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.05$ behaupten zu können, dass diese Geschwindigkeitsbeschränkung die Anzahl der Verkehrstoten signifikant gesenkt hat?

▼

Lösung: Wir können wieder annehmen, dass die Anzahl X bzw Y der in den Jahren 1992 bzw 1993 in Tirol täglich bei Verkehrsunfällen getöteten Personen poissonverteilt ist. Wir haben es somit mit dem Testproblem

$$\wp_X \times \wp_Y = \{\{\mathcal{P}[\lambda_x], \mathcal{P}[\lambda_y]\} \mid \lambda_x, \lambda_y > 0\}$$
$$\mathcal{H}_0 = \{\{\mathcal{P}[\lambda_x], \mathcal{P}[\lambda_y]\} \mid \lambda_x \leq \lambda_y\}$$
$$\mathcal{H}_1 = \{\{\mathcal{P}[\lambda_x], \mathcal{P}[\lambda_y]\} \mid \lambda_x > \lambda_y\}$$

zu tun, wobei eine Stichprobe $\vec{x}$ vom Umfang $n = 182$ (halbes Jahr) mit $a = n\,\overline{x} = 35$ und eine Stichprobe $\vec{y}$ vom Umfang $m = 365$ (ganzes Jahr) mit $b = m\,\overline{y} = 60$ vorliegt. Da die Stichprobenumfänge n und m groß sind, können wir für dieses Testproblem den einseitigen Poissontest für zwei Grundgesamtheiten verwenden. Wie die folgende Rechnung zeigt, wird die Hypothese $\mathcal{H}_0$ beim Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ angenommen, man kann also aufgrund der vorliegenden Daten aus Tirol nicht behaupten, dass diese Geschwindigkeitsbeschränkung die Anzahl der Verkehrstoten signifikant gesenkt hat:

```
n = 182; xmean = 35/n; m = 365; ymean = 60/m; α = 0.05;
s = Sqrt[xmean/n + ymean/m];
If[(xmean - ymean)/s > Quantile[NormalDistribution[0, 1], 1 - α],
  Print["Reject null hypothesis at significance level α -> ", α],
  Print["Fail to reject null hypothesis at significance level α -> ", α]]
Clear[n, xmean, m, ymean, α, s]
```

```
Fail to reject null hypothesis at significance level α -> 0.05
```

Durch Probieren erkennt man, dass es im Jahr 1993 maximal 47 Verkehrstote hätte geben dürfen um behaupten zu können, dass diese Geschwindigkeitsbeschränkung eine signifikante Wirkung zeigt.

Natürlich könnte man den Poissontest für zwei Grundgesamtheiten in *Mathematica* implementieren. Da jedoch der modifizierte t-Test für zwei Grundgesamtheiten stets zu ganz ähnlichen Ergebnissen führt, wollen wir darauf verzichten und dafür ein konkretes Beispiel behandeln:

8.4.4 Beispiel: Zwei Schreibkräfte bekamen die Aufgabe, jeweils gleich umfangreiche Textseiten möglichst schnell abzuschreiben. Registriert wurde für jede Seite die Anzahl der Tippfehler. Kann man aufgrund des Datenmaterials *tippfehler* behaupten, dass die Schreibkraft A signifikant weniger Fehler macht als die Schreibkraft B?

▼

Lösung: Wir lesen das im Datenordner abgelegte Datenfile *tippfehlerfile* ein, wählen mit Hilfe von Cases und Part die Anzahl der Tippfehler der beiden Schreibkräfte aus und bezeichnen diese Stichproben mit "tipseA" und "tipseB". Mit Hilfe von Mean ermitteln wir zuerst die durchschnittliche Anzahl der den beiden Schreibkräften pro Seite unterlaufenen Tippfehler:

```
tipseA = Part[Cases[<< tippfehlerfile, {A, x_}], All, 2];
tipseB = Part[Cases[<< tippfehlerfile, {B, y_}], All, 2];
{Mean[tipseA], Mean[tipseB]} // N
```

```
{5.7, 6.71875}
```

Wir wollen nun testen, ob der Erwartungswert λ_x der poissonverteilten Anzahl X der Tippfehler von Schreibkraft A tatsächlich signifikant kleiner ist, als der Erwartungswert λ_y der poissonverteilten Anzahl Y der Tippfehler von Schreibkraft B. Dazu wenden wir auf die beiden Stichproben den Befehl MeanDifferenceTest in der Form des modifizierten t-Tests für zwei Grundgesamtheiten an:

```
MeanDifferenceTest[tipseA, tipseB, 0, TwoSided → False]
Clear[tipseA, tipseB]
```

```
OneSidedPValue → 0.0833172
```

Obwohl Schreibkraft A pro Seite im Durchschnitt deutlich weniger Fehler macht als Schreibkraft B, ist dieser Unterschied dennoch nicht signifikant.

8.5 Der Exponentialtest für eine Grundgesamtheit

Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist wieder eine typische Fragestellung:

8.5.1 Beispiel: Man entwickle einen Test mit Signifikanz α für das Testproblem

$$\mathcal{P}_X = \{\mathcal{E}[\lambda] \mid \lambda > 0\}$$
$$\mathcal{H}_0 = \{\mathcal{E}[\lambda] \mid \lambda \leq \lambda_0\}$$
$$\mathcal{H}_1 = \{\mathcal{E}[\lambda] \mid \lambda > \lambda_0\}$$

▼

Lösung: Da bekanntlich der Mittelwert $\overline{X}^{(n)}$ ein guter Schätzer für den unbekannten Erwartungswert $\mathbb{E}[X] = 1/\lambda$ einer exponentialverteilten Zufallsvariablen X ist, liegt es nahe, die Hypothese $\mathcal{H}_0$ abzulehnen, wenn $\overline{X}^{(n)}$ deutlich kleiner als ein gewisser Schwellwert k ist. Damit der Test T mit dem Ablehnungsbereich $\{T = 1\} = \{\overline{X}^{(n)} < k\}$ das

Signifikanzniveau α besitzt, muss dieser Schwellwert k so gewählt werden, dass für alle $\lambda \leq \lambda_0$ die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}[\{T=1\}; \mathcal{P}[\lambda]] = \mathbb{P}[\{\overline{X}^{(n)} < k\}; \mathcal{E}[\lambda]]$$

durch α beschränkt ist. Nun sind aber die Zufallsvariablen $2\,\lambda\,X_i$ wegen Satz 15.4.6 und Satz 22.3.8 offenbar $\mathcal{C}$hi[2]-verteilt, also gilt wegen der Faltungsformel für $\mathcal{C}$hi-Quadrat Verteilungen für alle $\lambda \leq \lambda_0$

$$\mathbb{P}[\{\overline{X}^{(n)} < k\}; \mathcal{E}[\lambda]] = \mathbb{P}[\{2\,\lambda\,n\,\overline{X}^{(n)} < 2\,\lambda\,n\,k\}; \mathcal{E}[\lambda]] = C_{2\,n}[2\,\lambda\,n\,k] \leq C_{2\,n}[2\,\lambda_0\,n\,k]$$

wobei C_n die Verteilungsfunktion der $\mathcal{C}hi[n]$-Verteilung bezeichnet. Da aber die beiden Aussagen

$$C_{2\,n}[2\,\lambda_0\,n\,k] = \alpha \qquad \text{und} \qquad 2\,\lambda_0\,n\,k = c_{2\,n;\alpha}$$

offenbar gleichbedeutend sind (mit $c_{n;q}$ bezeichnen wir das q-Quantil der Chi-Quadrat Verteilung mit n Freiheitsgraden), besitzt der Test T für die Hypothese $\mathcal{H}_0$ gegen die Alternative $\mathcal{H}_1$ mit dem Ablehnungsbereich

$$\{T=1\} = \{2\,\lambda_0\,n\,\overline{X}^{(n)} < c_{2\,n;\alpha}\}$$

somit das gewünschte Signifikanzniveau α.

8.5.2 Der Exponentialtest: Der Exponentialtest für eine Grundgesamtheit wird verwendet, wenn eine Hypothese über den Parameter λ einer exponentialverteilten Grundgesamtheit getestet werden soll:

$\mathfrak{P}_X$	$\mathcal{H}_0$	$\mathcal{H}_1$	Ablehnungsbereich
$\{\mathcal{E}[\lambda] \mid \lambda > 0\}$	$\lambda = \lambda_0$	$\lambda \neq \lambda_0$	$2\,\lambda_0\,n\,\overline{X}^{(n)} < c_{2\,n;\alpha/2} \vee 2\,\lambda_0\,n\,\overline{X}^{(n)} > c_{2\,n;1-\alpha/2}$
	$\lambda \leq \lambda_0$	$\lambda > \lambda_0$	$2\,\lambda_0\,n\,\overline{X}^{(n)} < c_{2\,n;\alpha}$
	$\lambda \geq \lambda_0$	$\lambda < \lambda_0$	$2\,\lambda_0\,n\,\overline{X}^{(n)} > c_{2\,n;1-\alpha}$

Dabei bezeichnet $c_{n;q}$ das q-Quantil der $\mathcal{C}$hi[n]-Verteilung.

Mit dem folgenden Beispiel soll die Verwendung dieses Tests wieder demonstriert werden:

8.5.3 Beispiel: Von $n = 85$ zufällig der Produktion entnommenen elektronischen Komponenten wurde die Lebensdauer ermittelt. Dabei ergab sich eine durchschnittliche Lebensdauer von $\overline{x} = 130.552$ Tagen. Kann aufgrund dieser Stichprobe $\vec{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ behauptet werden, dass der Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ der Lebensdauer X dieser Komponenten signifikant kleiner als der angepeilte Wert von 150 Tagen ist?

▼

Lösung: Da es sich bei elektronischen Komponenten um nichtalternde Geräte handelt, können wir annehmen, dass ihre Lebensdauer X exponentialverteilt ist. Damit haben wir es mit dem einseitigen Testproblem (man beachte, dass der Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ einer $\mathcal{E}[\lambda]$-verteilten Zufallsvariablen X gleich $1/\lambda$ ist)

$$\mathfrak{P}_X = \{\mathcal{E}[\lambda] \mid \lambda > 0\}$$
$$\mathcal{H}_0 = \{\mathcal{E}[\lambda] \mid \lambda \leq \lambda_0\}$$
$$\mathcal{H}_1 = \{\mathcal{E}[\lambda] \mid \lambda > \lambda_0\}$$

mit $\lambda_0 = 1/150$ zu tun, wobei eine Stichprobe $\vec{x}$ vom Umfang $n = 85$ mit $\overline{x} = 130.552$ vorliegt. Für dieses Testproblem ist der einseitige Exponentialtest für eine Grundgesamtheit geeignet. Wie die folgende Rechnung zeigt, wird die Hypothese $\mathcal{H}_0$ sogar bei dem relativ großen Signifikanzniveau $\alpha = 0.1$ nicht abgelehnt:

```
λ0 = 1/150; n = 85; xmean = 130.552; α = 0.1;
If[2 λ0 n xmean < Quantile[ChiSquareDistribution[2 n], α],
  Print["Reject null hypothesis at significance level α –> ", α],
  Print["Fail to reject null hypothesis at significance level α –> ", α]]
Clear[λ0, n, xmean, α]
```

```
Fail to reject null hypothesis at significance level α -> 0.1
```

Obwohl die experimentell ermittelte durchschnittliche Lebensdauer mit 130.552 Tagen doch deutlich kleiner als die angepeilte mittlere Lebensdauer von 150 Tagen ist, kann trotzdem nicht behauptet werden, dass die Produktion das angestrebte Ziel signifikant verfehlt. Der Grund für dieses bemerkenswerte Resultat ist die große Streuung von exponentialverteilten Zufallsvariablen.

Natürlich lässt sich der Exponentialtest für eine Grundgesamtheit leicht in *Mathematica* implementieren:

■ ExponentialTest[*stich*, λ_0, TwoSided → True]

berechnet für die Stichprobe *stich* den *p*-Wert des zweiseitigen Exponentialtests für die Hypothese $\lambda = \lambda_0$ gegen die Alternative $\lambda \neq \lambda_0$.

Soll für die Stichprobe *stich* der *p*-Wert des einseitigen Exponentialtests berechnet werden, so verwende man die Option TwoSided → False. Dabei wird im Fall $\overline{x} > 1/\lambda_0$ die Hypothese $\lambda \geq \lambda_0$ gegen die Alternative $\lambda < \lambda_0$ und im Fall $\overline{x} < 1/\lambda_0$ die Hypothese $\lambda \leq \lambda_0$ gegen die Alternative $\lambda > \lambda_0$ getestet.

8.5.4 Beispiel: Wir befassen uns nochmals mit der Fragestellung von Beispiel 8.5.3, wobei jetzt aber die vollständige Stichprobe $\vec{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ vorliegt (man vergleiche dazu das Datenmaterial *lebensdauer*) und ermittle den zugehörigen *p*-Wert.

▼

Lösung: Wir lesen das im Datenordner abgelegte Datenfile *lebensdauerfile* ein, rufen davon die zweite Spalte auf, streichen wie üblich die erste Zeile mit dem Namen der Variablen und wenden auf diese Stichprobe den Befehl ExponentialTest an:

```
λ0 = 1/150;
ExponentialTest[Rest[Part[<< lebensdauerfile, All, 2]], λ0, TwoSided → False]
Clear[λ0]
```

```
OneSidedPValue → 0.112239
```

Der auf diese Weise ermittelte *p*-Wert zeigt ebenfalls deutlich, dass nicht behauptet werden kann, der Erwartungswert der Lebensdauer der von uns getesteten elektronischen Komponenten sei signifikant kleiner als 150 Tage.

8.6 Der Exponentialtest für zwei Grundgesamtheiten

Wir beginnen wiederum mit einer typischen Fragestellung:

8.6.1 Beispiel: Man entwickle einen Test mit Signifikanz α für das Testproblem

$$\mathcal{P}_X \times \mathcal{P}_Y = \{\{\mathcal{E}[\lambda_x], \mathcal{E}[\lambda_y]\} \mid \lambda_x, \lambda_y > 0\}$$

$$\mathcal{H}_0 = \{\{\mathcal{E}[\lambda_x], \mathcal{E}[\lambda_y]\} \mid \lambda_x / \lambda_y \leq 1\}\}$$

$\mathcal{H}_1 = \{\{\mathcal{E}[\lambda_x], \mathcal{E}[\lambda_y]\} \mid \lambda_x/\lambda_y > 1\}$

▼

Lösung: Da bekanntlich die Mittelwerte $\overline{X}^{(n)}$ bzw $\overline{Y}^{(m)}$ gute Schätzer für die beiden unbekannten Erwartungswerte $\mathbb{E}[X] = 1/\lambda_x$ bzw $\mathbb{E}[Y] = 1/\lambda_y$ sind, liegt es nahe, die Hypothese $\mathcal{H}_0$ abzulehnen, wenn $\overline{X}^{(n)}/\overline{Y}^{(m)}$ deutlich kleiner als 1 ist. Damit der Test T mit dem Ablehnungsbereich $\{T = 1\} = \{\overline{X}^{(n)}/\overline{Y}^{(m)} < k\}$ das Signifikanzniveau α besitzt, muss der Schwellwert k so gewählt werden, dass für alle $\lambda_x, \lambda_y > 0$ mit $\lambda_x/\lambda_y \le 1$

$$\mathbb{P}[\{\overline{X}^{(n)}/\overline{Y}^{(m)} < k\}; \{\mathcal{E}[\lambda_x], \mathcal{E}[\lambda_y]\}]$$

durch α beschränkt ist. Die Zufallsvariablen $2\,\lambda_x\,X_i$ bzw $2\,\lambda_y\,Y_k$ sind wegen Satz 15.4.6 und Satz 22.3.8 aber $\mathcal{C}$hi[2]-verteilt, also gilt wegen Satz 23.5.1 für alle $\lambda_x, \lambda_y > 0$ mit $\lambda_x/\lambda_y \le 1$

$$\mathbb{P}[\{\overline{X}^{(n)}/\overline{Y}^{(m)} < k\}; \{\mathcal{E}[\lambda_x], \mathcal{E}[\lambda_y]\}] = \mathbb{P}[\{\frac{2\,\lambda_x\,\overline{X}^{(n)}}{2\,\lambda_y\,\overline{Y}^{(m)}} < \frac{\lambda_x}{\lambda_y}\,k\}; \{\mathcal{E}[\lambda_x], \mathcal{E}[\lambda_y]\}] \le$$

$$\le \mathbb{P}[\{\frac{(2\,\lambda_x\,X_1 + 2\,\lambda_x\,X_2 + \ldots + 2\,\lambda_x\,X_n)/n}{(2\,\lambda_y\,Y_1 + 2\,\lambda_y\,Y_2 + \ldots + 2\,\lambda_y\,Y_m)/m} < k\}; \{\mathcal{E}[\lambda_x], \mathcal{E}[\lambda_y]\}] = F_{2\,n,2\,m}[k]$$

wobei $F_{n,m}$ die Verteilungsfunktion der $\mathcal{F}[n, m]$-Verteilung bezeichnet. Da die beiden Aussagen

$$F_{2\,n,2\,m}[k] = \alpha \qquad \text{und} \qquad k = f_{2\,n,2\,m;\alpha}$$

offenbar gleichbedeutend sind (mit $f_{n,m;q}$ bezeichnen wir das q-Quantil der Fisher F Verteilung mit den Parametern n und m), besitzt der Test T für die Hypothese $\mathcal{H}_0$ gegen die Alternative $\mathcal{H}_1$ mit dem Ablehnungsbereich

$$\{T = 1\} = \{\overline{X}^{(n)}/\overline{Y}^{(m)} < f_{2\,n,2\,m;\alpha}\}$$

somit das gewünschte Signifikanzniveau α.

8.6.2 Der Exponentialtest: Der Exponentialtest für zwei Grundgesamtheiten wird verwendet, wenn die Parameter λ_x und λ_y zweier exponentiell verteilter Grundgesamtheiten verglichen werden sollen:

$\mathcal{P}_X \times \mathcal{P}_Y$	$\mathcal{H}_0$	$\mathcal{H}_1$	Ablehnungsbereich
$\{\{\mathcal{E}[\lambda_x], \mathcal{E}[\lambda_y]\} \mid \lambda_x, \lambda_y > 0\}$	$\lambda_x/\lambda_y = \lambda_0$	$\lambda_x/\lambda_y \ne \lambda_0$	$\lambda_0\,\overline{X}^{(n)}/\overline{Y}^{(m)} < f_{2\,n,2\,m;\alpha/2} \vee$ $\vee\, \lambda_0\,\overline{X}^{(n)}/\overline{Y}^{(m)} > f_{2\,n,2\,m;1-\alpha/2}$
	$\lambda_x/\lambda_y \le \lambda_0$	$\lambda_x/\lambda_y > \lambda_0$	$\lambda_0\,\overline{X}^{(n)}/\overline{Y}^{(m)} < f_{2\,n,2\,m;\alpha}$
	$\lambda_x/\lambda_y \ge \lambda_0$	$\lambda_x/\lambda_y < \lambda_0$	$\lambda_0\,\overline{X}^{(n)}/\overline{Y}^{(m)} > f_{2\,n,2\,m;1-\alpha}$

Dabei bezeichnet $f_{n,m;q}$ das q-Quantil der $\mathcal{F}[n, m]$-Verteilung.

▼

Im Gegensatz zum Probability-Test für zwei Grundgesamtheiten bzw zum Poissontest für zwei Grundgesamtheiten handelt es beim Exponentialtest für zwei Grundgesamtheiten um einen exakten Test!

Wir machen dazu wieder ein Beispiel:

8.6.3 Beispiel: Bei $n = 18$ zufällig der Produktion entnommenen nichtalternden Geräten vom Typ A sowie $m = 12$ zufällig der Produktion entnommenen nichtalternden Geräten vom Typ B ergab sich eine durchschnittliche Lebensdauer von $\overline{x} = 3.02287$ bzw $\overline{y} = 5.40022$ Jahren. Kann aufgrund dieser Daten behauptet werden, dass Geräte vom Typ A im Mittel eine signifikant kürzere Lebensdauer besitzen als Geräte vom Typ B.

▼

Lösung: Die Lebensdauern X bzw Y der nichtalternden Geräte vom Typ A bzw Typ B sind bekanntlich exponentialverteilt. Damit haben wir es mit dem einseitigen Testproblem

$$\mathcal{P}_X \times \mathcal{P}_Y = \{\{\mathcal{E}[\lambda_x], \mathcal{E}[\lambda_y]\} \mid \lambda_x, \lambda_y > 0\}$$

$$\mathcal{H}_0 = \{\{\mathcal{E}[\lambda_x], \mathcal{E}[\lambda_y]\} \mid \lambda_x/\lambda_y \leq 1\}$$

$$\mathcal{H}_1 = \{\{\mathcal{E}[\lambda_x], \mathcal{E}[\lambda_y]\} \mid \lambda_x/\lambda_y > 1\}$$

zu tun, wobei Stichproben $\vec{x}$ vom Umfang $n = 18$ mit $\overline{x} = 3.02287$ und $\vec{y}$ vom Umfang $m = 12$ mit $\overline{y} = 5.40022$ vorliegen. Für dieses Testproblem ist der einseitige Exponentialtest für zwei Grundgesamtheit geeignet. Wie die folgende Rechnung zeigt, wird die Hypothese $\mathcal{H}_0$ beim Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ nicht abgelehnt:

```
n = 18; xmean = 3.02287; m = 12; ymean = 5.40022; α = 0.05;
If[xmean / ymean < Quantile[FRatioDistribution[2 n, 2 m], α],
  Print["Reject null hypothesis at significance level α -> ", α],
  Print["Fail to reject null hypothesis at significance level α -> ", α]]
Clear[n, xmean, m, ymean, α]
```

```
Fail to reject null hypothesis at significance level α -> 0.05
```

Obwohl die experimentell ermittelte durchschnittlichen Lebensdauer von Geräten vom Typ A mit 3.02287 Jahren deutlich kleiner ist als die durchschnittliche Lebensdauer von Geräten vom Typ B, welche immerhin 5.40022 Jahre beträgt, ist dieser Unterschied zu gering um signifikant behaupten zu können, dass Geräte vom Typ A eine kleinere mittlere Lebensdauer besitzen als Geräte vom Typ B. Der Grund dafür ist einerseits der geringe Stichprobenumfang und andererseits wieder die Tatsache, dass exponentialverteilte Zufallsvariable stark streuen.

Schließlich wollen wir auch den Exponentialtest für zwei Grundgesamtheit in *Mathematica* implementieren (im Gegensatz zum Probability-Test für zwei Grundgesamtheiten bzw zum Poissontest für zwei Grundgesamtheiten handelt es beim Exponentialtest für zwei Grundgesamtheiten um einen exakten Test:

■ ExponentialRatioTest[*xstich*, *ystich*, λ_0, TwoSided → True]

berechnet für die beiden Stichproben *xstich* und *ystich* den *p*-Wert des zweiseitigen Exponentialtests für zwei Grundgesamtheiten für die Hypothese $\lambda_x/\lambda_y = \lambda_0$ gegen die Alternative $\lambda_x/\lambda_y \neq \lambda_0$.

Soll für die Stichproben *xstich* und *ystich* der *p*-Wert des einseitigen Exponentialtests für zwei Grundgesamtheiten berechnet werden, so verwende man die Option TwoSided → False. Dabei wird im Fall $\overline{y}/\overline{x} < \lambda_0$ die Hypothese $\lambda_x/\lambda_y \geq \lambda_0$ gegen die Alternative $\lambda_x/\lambda_y < \lambda_0$ und im Fall $\overline{y}/\overline{x} > \lambda_0$ die Hypothese $\lambda_x/\lambda_y \leq \lambda_0$ gegen die Alternative $\lambda_x/\lambda_y > \lambda_0$ getestet.

8.6.4 Beispiel: Wir befassen uns nochmals mit der Fragestellung von Beispiel 8.6.3, wobei jetzt aber die vollständigen Stichproben $\vec{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ bzw $\vec{y} = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ vorliegen (man vergleiche das Datenmaterial *geräte*) und ermittle den zugehörigen *p*-Wert.

▼

Lösung: Wir lesen das im Datenordner abgelegte Datenfile *gerätefile* ein, erzeugen mit Hilfe von Cases und Part die Stichproben $\vec{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ und $\vec{y} = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ und wenden auf diese Stichproben den Befehl ExponentialRatioTest an:

```
xstich = Part[Cases[<< gerätefile, {A, x_}], All, 2];
ystich = Part[Cases[<< gerätefile, {B, y_}], All, 2];
ExponentialRatioTest[xstich, ystich, 1, TwoSided → False]
Clear[xstich, ystich]
```

```
OneSidedPValue → 0.0561212
```

Dieser *p*-Wert zeigt wieder, dass bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.05$ nicht behauptet werden kann, dass die mittlere Lebensdauer der Geräte vom Typ A kleiner ist als die mittlere Lebensdauer der Geräte vom Typ B.