§10 Der MLQ-Test pfad

▼

```
SetDirectory[
    "C:\Dokumente und Einstellungen\Administrator\Desktop\Stochastik mit Mathematica
        6.0\Statistik\Datenordner"];

<< StatisticalPlots`;
<< MultivariateStatistics`;

ScatterPlot[matrix_, options___] := Module[{ax, ay, bx, plot1, plot2},
        ax = Min[Part[matrix, All, 1]];
        ay = Min[Part[matrix, All, 2]];
        bx = Max[Part[matrix, All, 1]];
        plot1 = ListPlot[matrix, options];
        plot2 = Plot[Evaluate[Fit[matrix, {1, x}, {x}]], {x, ax, bx}, PlotStyle → {Thickness[0.01], Red}];
        Show[{plot1, plot2}]];

CorrelationTest[stich_] := Module[{n, x, y, ρ},
    n = Length[stich];
    x = Part[stich, All, 1];
    y = Part[stich, All, 2];
    ρ = Correlation[x, y];
    Print["PValue−>", 1 − CDF[ChiSquareDistribution[1], −n Log[1 − ρ^2]] // N]]

BartlettTest[daten_] := Module[{n, s, dat, nl, vl, am, gm},
    n = Length[daten];
    s = Length[Union[Part[daten, All, 1]]];
    dat = Table[Part[Select[daten, #[[1]] == i &], All, 2], {i, 1, s}];
    nl = Table[Length[dat[[i]]], {i, 1, s}];
    vl = Table[CentralMoment[dat[[i]], 2], {i, 1, s}];
    am = nl.vl / n;
    gm = Exp[nl.Log[vl] / n];
    Print["PValue→", 1 − CDF[ChiSquareDistribution[s − 1], n Log[am / gm]] // N]]
```

Im Rahmen der Schätztheorie haben wir mit der Maximum-Likelihood-Methode ein Verfahren kennen gelernt, mit dessen Hilfe sich gute Schätzer für unbekannte Parameter gewinnen lassen. Ein auf ähnlichen Prinzipien aufbauendes Verfahren existiert auch im Rahmen der parametrischen Testtheorie. Wir werden dieses Verfahren nun im Detail besprechen und damit anschließend für einige interessante Testsituationen geeignete Tests entwickeln.

10.1 Der Maximum-Likelihood-Quotiententest

Wir nehmen in diesem Kapitel stets an, dass ein k-parametrisches Testproblem der Form

$$\mathfrak{P}_X = \{\mathbb{P}[\vec{\vartheta}] \mid \vec{\vartheta} \in \Theta\}$$
$$\mathcal{H}_0 = \{\mathbb{P}[\vec{\vartheta}] \mid \vec{\vartheta} \in \Theta_0\}$$
$$\mathcal{H}_1 = \mathfrak{P}_X - \mathcal{H}_0$$

vorliegt, wobei alle auftretenden Verteilungen $\mathbb{P}[\vec{\vartheta}]$ entweder stetig oder diskret sind und ihre Verteilungsdichte wie üblich mit $\mathbb{f}_{\vec{\vartheta}}$ bezeichnet wird.

Falls die Hypothese $\mathcal{H}_0$ zutrifft, die konkrete Stichprobe $\vec{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ vom Umfang n also nach einem

Verteilungsgesetz $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}[\vec{\vartheta}]$ mit $\vec{\vartheta} \in \Theta_0$ ausgewählt wurde, so werden die beiden Werte

$$\mathrm{Max}\{L[x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \vec{\vartheta}] \mid \vec{\vartheta} \in \Theta_0\} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Max}\{L[x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \vec{\vartheta}] \mid \vec{\vartheta} \in \Theta\}$$

etwa gleich groß sein; trifft hingegen die Alternative $\mathcal{H}_1$ zu, so wird der erste dieser beiden Werte deutlich kleiner sein als der zweite Wert. Diese Tatsache wird offensichtlich, wenn man beachtet, dass

$$L[x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \vec{\vartheta}] = \mathbb{f}_{\vec{\vartheta}}[x_1]\,\mathbb{f}_{\vec{\vartheta}}[x_2] \ldots \mathbb{f}_{\vec{\vartheta}}[x_n]$$

der Wahrscheinlichkeit dafür entspricht, die konkrete Stichprobe $\vec{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ zu erhalten, falls X nach dem Verteilungsgesetz $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}[\vec{\vartheta}]$ verteilt ist.

Es liegt daher nahe, die Hypothese $\mathcal{H}_0$ abzulehnen, wenn der sogenannte Maximum-Likelihood-Quotient

$$\mathrm{MLQ} = \frac{\mathrm{Max}\{L[x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \vec{\vartheta}] \mid \vec{\vartheta} \in \Theta_0\}}{\mathrm{Max}\{L[x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \vec{\vartheta}] \mid \vec{\vartheta} \in \Theta\}} = \frac{L[x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \hat{\vec{\vartheta}}_0[x_1, x_2, \ldots, x_n]]}{L[x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \hat{\vec{\vartheta}}[x_1, x_2, \ldots, x_n]]}$$

kleiner als ein gewisser Schwellwert ist. Dabei bezeichnet $\hat{\vec{\vartheta}}_0[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ bzw $\hat{\vec{\vartheta}}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ die nach der Maximum-Likelihood-Methode gewonnen Schätzwerte für $\vec{\vartheta} \in \Theta_0$ bzw $\vec{\vartheta} \in \Theta$.

Um diese Erkenntnis bei der Konstruktion eines Tests mit vorgegebenem Signifikanzniveau α nutzbringend anwenden zu können, müssen wir wissen, wie dieser Maximum-Likelihood-Quotient MLQ (oder eine monotone Funktion davon) bei Vorliegen der Hypothese $\mathcal{H}_0$ verteilt ist.

Wir demonstrieren diese Vorgangsweise an einem einfachen Beispiel:

10.1.1 Beispiel: Unter Verwendung der eben besprochenen Methode erzeuge man für das Testproblem

$$\mathcal{P}_X = \{\mathcal{N}[\mu, \sigma] \mid \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0\}$$
$$\mathcal{H}_0 = \{\mathcal{N}[\mu, \sigma] \mid \mu = \mu_0, \sigma > 0\}$$
$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{P}_X - \mathcal{H}_0$$

einen Test mit Signifikanz α.

▼

Lösung: In diesem Beispiel ist $\Theta = \mathbb{R} \times]\,0, \infty[$ und $\Theta_0 = \{\mu_0\} \times]\,0, \infty[$. Mit der Maximum-Likelihood-Methode (vergleiche Beispiel 5.4.3 und hinsichtlich der Definition von V_{X,μ_0} auch Beispiel 5.2.3) erhält man die Schätzer

$$\hat{\vec{\vartheta}}[X_1, X_2, \ldots, X_n] = \{\overline{X}, \sqrt{{}^{(2)}\tilde{\overline{X}}}\} \qquad \text{bzw} \qquad \hat{\vec{\vartheta}}[X_1, X_2, \ldots, X_n] = \{\mu_0, \sqrt{V_{X,\mu_0}}\}$$

für die unbekannten Parameter $\vec{\vartheta} = \{\mu, \sigma\} \in \Theta$ bzw $\vec{\vartheta}_0 = \{\mu_0, \sigma\} \in \Theta_0$. Für den Maximum-Likelihood-Quotient MQL ergibt sich damit nach elementaren Umformungen

$$\mathrm{MLQ} = \frac{L[X_1, X_2, \ldots, X_n \mid \hat{\vec{\vartheta}}_0[X_1, X_2, \ldots, X_n]]}{L[X_1, X_2, \ldots, X_n \mid \hat{\vec{\vartheta}}[X_1, X_2, \ldots, X_n]]} = \ldots = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}\right]^{-n/2} = (\star)$$

Berücksichtigt man die Beziehung

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X} + \overline{X} - \mu_0)^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2 + n(\overline{X} - \mu_0)^2$$

so gilt weiter

$$(\star) = \left[1 + \frac{n(\overline{X} - \mu_0)^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}\right]^{-n/2} = \left[1 + \frac{1}{n-1}\left[\frac{|\overline{X} - \mu_0|}{\sqrt{V_X}}\sqrt{n}\right]^2\right]^{-n/2}$$

Der mit diesem Verfahren erzeugte Test besitzt somit den Ablehnungsbereich

$$\{\text{MLQ} < k\} = \left\{ \frac{|\overline{X} - \mu_0|}{\sqrt{V_X}} \sqrt{n} > \sqrt{(n-1)\left(k^{-2/n} - 1\right)} \right\}$$

stimmt also mit dem bekannten t-Test für eine Grundgesamtheit überein.

Falls es nicht möglich ist, die Verteilung des Maximum-Likelihood-Quotienten (oder zumindest einer monotonen Funktion dieses Maximum-Likelihood-Quotienten) bei Vorliegen der Hypothese $\mathcal{H}_0$ zu bestimmen, so hilft der folgende Satz, den wir ohne Beweis anführen:

10.1.2 Satz von WILKS: Ist $\Theta \subseteq \mathbb{R}^k$ ein k-dimensionaler Quader, ist Θ_0 eine k'-dimensionale Sektion von Θ und ist $X_1, X_2, \ldots, X_n$ eine nach dem Verteilungsgesetz $\mathbb{P}_X \in \mathcal{H}_0$ ausgewählte Stichprobe vom Umfang n, so ist die Statistik

$$-2\,\text{Log}[\text{MLQ}] = -2\,\text{Log}\left[\frac{L[X_1, X_2, \ldots, X_n \mid \hat{\vec{\vartheta}}_0[X_1, X_2, \ldots, X_n]]}{L[X_1, X_2, \ldots, X_n \mid \hat{\vec{\vartheta}}[X_1, X_2, \ldots, X_n]]}\right]$$

für große n näherungsweise Chi-Quadrat verteilt mit $k - k'$ Freiheitsgraden.

Wir sind damit in der Lage, ein weitgehend allgemeines Verfahren zur Konstruktion von Tests anzugeben (da der Satz von Wilks nur asymptotisch für große n gilt, besitzen die mit diesem Verfahren konstruierten Tests nur annähernd das vorgegebene Signifikanzniveau α):

10.1.3 Der Maximum-Likelihood-Quotiententest liefert ein weitgehend allgemeines Verfahren zur Konstruktion von parametrischen Tests. Voraussetzung dafür ist, dass das a-priori Modell $\mathfrak{P}_X = \{\mathbb{P}[\vec{\vartheta}] \mid \vec{\vartheta} \in \Theta\}$ bzw die Hypothese $\mathcal{H}_0 = \{\mathbb{P}[\vec{\vartheta}] \mid \vec{\vartheta} \in \Theta_0\}$ durch einen k-dimensionaler Quader $\Theta \subseteq \mathbb{R}^k$ bzw eine k'-dimensionale Sektion Θ_0 von Θ parametrisiert sind, alle auftretenden Verteilungen $\mathbb{P}[\vec{\vartheta}]$ entweder stetig oder diskret sind und der Stichprobenumfang n groß ist.

$\mathfrak{P}_X$	$\mathcal{H}_0$	$\mathcal{H}_1$	Ablehnungsbereich
$\{\mathbb{P}[\vec{\vartheta}] \mid \vec{\vartheta} \in \Theta\}$	$\vec{\vartheta} \in \Theta_0$	$\vec{\vartheta} \notin \Theta_0$	$-2\,\text{Log}[\text{MLQ}] > c_{k-k';1-\alpha}$

Dabei bezeichnet $c_{n;q}$ das q-Quantil der $Chi[n]$-Verteilung und MLQ den Maximum-Likelihood-Quotient

$$\text{MLQ} = \frac{L[X_1, X_2, \ldots, X_n \mid \hat{\vec{\vartheta}}_0[X_1, X_2, \ldots, X_n]]}{L[X_1, X_2, \ldots, X_n \mid \hat{\vec{\vartheta}}[X_1, X_2, \ldots, X_n]]}$$

wobei $\hat{\vec{\vartheta}}_0[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ bzw $\hat{\vec{\vartheta}}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ die Maximum-Likelihood-Schätzer für die Parameter $\vec{\vartheta} \in \Theta_0$ bzw $\vec{\vartheta} \in \Theta$ bezeichnen.

10.2 Beispiele

Wir wollen in diesem Abschnitt für zwei wichtige Testprobleme die zugehörigen Maximum-Likelihood-Quotiententests herleiten (wobei wir auf die oft umfangreichen, aber einfachen Rechnungen nicht im Detail eingehen). Da dabei stets der Satz von Wilks verwendet wird, besitzen diese Tests nur annähernd das vorgegebene Signifikanzniveau und sollen nur dann verwendet werden, wenn der Stichprobenumfang groß ist.

Wir behandeln zuerst den sogenannten Korrelationstest:

10.2.1 Der Korrelationstest: Gegeben sei das a-priori Modell

$$\mathcal{P}_{X,Y} = \{\mathcal{MN}[\vec{\mu}, \Sigma] \mid \vec{\mu} = \{\mu_1, \mu_2\} \in \mathbb{R}^2, \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1{}^2 & \varrho\,\sigma_1\,\sigma_2 \\ \varrho\,\sigma_1\,\sigma_2 & \sigma_2{}^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2^2 \text{ positiv definit}\}$$

Gesucht ist ein Test mit Signifikanz α für die Hypothese $\mathcal{H}_0 \ldots \rho = 0$ gegen die Alternative $\mathcal{H}_1 \ldots \rho \neq 0$. (Man beachte, dass mit diesem Test nicht nur getestet werden kann, ob die beiden Zufallsvariablen X und Y unkorreliert sind, sondern auch überprüft werden kann, ob diese Zufallsvariablen unabhängig sind.)

▼

Lösung: In diesem Beispiel ist $\Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times]\,0, \infty[\, \times\,]\,0, \infty[\, \times [-1, 1]$ und $\Theta_0 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times]\,0, \infty[\, \times\,]\,0, \infty[\, \times \{0\}$. Mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode (man vergleiche dazu Beispiel 5.4.4) erhält man die Schätzer

$$\hat{\vec{\vartheta}}_0[\{X_1, Y_1\}, \{X_2, Y_2\}, \ldots, \{X_n, Y_n\}] = \{\overline{X}, \overline{Y}, \sqrt{{}^{(2)}\tilde{\overline{X}}}, \sqrt{{}^{(2)}\tilde{\overline{Y}}}, R_{X,Y}\}$$

bzw

$$\hat{\vec{\vartheta}}_0[\{X_1, Y_1\}, \{X_2, Y_2\}, \ldots, \{X_n, Y_n\}] = \{\overline{X}, \overline{Y}, \sqrt{{}^{(2)}\tilde{\overline{X}}}, \sqrt{{}^{(2)}\tilde{\overline{Y}}}, 0\}$$

für die unbekannten Parameter $\vec{\vartheta} = \{\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho\}$ bzw $\vec{\vartheta}_0 = \{\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, 0\}$. Für den Maximum-Likelihood-Quotient MLQ ergibt sich damit

$$\text{MLQ} = \frac{L[\{X_1, Y_1\}, \{X_2, Y_2\}, \ldots, \{X_n, Y_n\} \mid \hat{\vec{\vartheta}}_0[\{X_1, Y_1\}, \{X_2, Y_2\}, \ldots, \{X_n, Y_n\}]]}{L[\{X_1, Y_1\}, \{X_2, Y_2\}, \ldots, \{X_n, Y_n\} \mid \hat{\vec{\vartheta}}[\{X_1, Y_1\}, \{X_2, Y_2\}, \ldots, \{X_n, Y_n\}]]} = \ldots = [1 - R_{X,Y}^2]^{n/2}$$

Wir werden somit die Hypothese $\mathcal{H}_0$ im Fall

$$-2\,\text{Log}[\text{MLQ}] = -n\,\text{Log}[1 - R_{X,Y}^2] > c_{1;1-\alpha}$$

ablehnen, wobei $c_{n;q}$ wie üblich das q-Quantil der $\mathcal{C}$hi$[n]$-Verteilung bezeichnet.

Der Korrelationstest lässt sich mühelos in *Mathematica* implementieren:

■ CorrelationTest[*stich*]

berechnet für die zweidimensional normalverteilte Stichprobe *stich* den p-Wert des Korrelationstests für die Hypothese $\mathcal{H}_0 \ldots \rho = 0$ gegen die Alternative $\mathcal{H}_1 \ldots \rho \neq 0$. Man beachte dabei, dass das Datenmaterial *stich* in der Form $\{\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \ldots\}$ eingegeben werden muss.

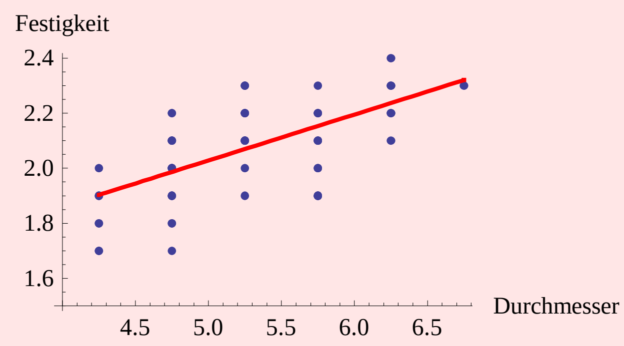
Wir veranschaulichen den Korrelationstests an einem konkreten Beispiel:

10.2.2 Beispiel: Von $n = 62$ Proben eines Garns wurden der Durchmesser und die Festigkeit ermittelt und diese Werte im Datenmaterial garn abgelegt. Man prüfe, ob diese beiden Merkmale unabhängig sind.

▼

Lösung: Jede statistische Analyse sollte mit einer graphischen Veranschaulichung des Datenmaterials beginnen. In unserem Fall eignet sich dazu ein Scatter-Plot:

```
garn = Rest[<< garnfile];
ScatterPlot[garn, PlotStyle → PointSize[0.02], AxesOrigin → {4, 1.5},
  AxesLabel → {"Durchmesser", "Festigkeit"}]
```



An Hand dieser Zeichnung erkennen wir, dass die beiden Merkmale Durchmesser und Festigkeit nicht unabhängig sein dürften. Wir wollen diese Vermutung aber noch mit Hilfe eines Tests bestätigen. Dazu nehmen wir an, dass der Durchmesser X und die Festigkeit Y von Garn einer zweidimensionalen Normalverteilung genügen, dass also das a-priori Modell

$$\mathbb{P}_{X,Y} = \{\mathcal{MN}[\vec{\mu}, \Sigma] \mid \vec{\mu} = \{\mu_1, \mu_2\} \in \mathbb{R}^2, \Sigma = \begin{pmatrix} {\sigma_1}^2 & \varrho\,\sigma_1\,\sigma_2 \\ \varrho\,\sigma_1\,\sigma_2 & {\sigma_2}^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2^2 \text{ positiv definit}\}$$

vorliegt (wobei die von uns zu analysierenden Daten offenbar gerundet sind). So gesehen haben wir die Hypothese $\mathcal{H}_0 \ldots \rho = 0$ gegen die Alternative $\mathcal{H}_1 \ldots \rho \neq 0$ zu testen. Wir verwenden dazu den Korrelationstest und ermitteln mit Hilfe des Befehls CorrelationTest den zugehörigen p-Wert:

```
CorrelationTest[garn]
Clear[garn]
```

```
PValue->6.52826×10^-8
```

Da dieser p-Wert sehr klein ist, wird die Hypothese $\mathcal{H}_0 \ldots \rho = 0$ deutlich abgelehnt. Der Durchmesser und die Festigkeit von Garn sind somit (erwartungsgemäß) sehr signifikant abhängig.

Wir wenden uns nun dem sogenannten Bartlett-Test zu:

10.2.3 Der Bartlett-Test: Gegeben sei das a-priori Modell

$$\mathbb{P}_{X_1} \times \mathbb{P}_{X_2} \times \ldots \times \mathbb{P}_{X_s} = \{\{\mathcal{N}[\mu_1, \sigma_1], \ldots, \mathcal{N}[\mu_s, \sigma_s]\} \mid \mu_1, \ldots, \mu_s \in \mathbb{R},\ \sigma_1, \ldots, \sigma_s > 0\}$$

Gesucht ist ein Test mit Signifikanz α für die Hypothese $\mathcal{H}_0 \ldots$ "alle σ_i sind gleich" gegen die Alternative $\mathcal{H}_1 \ldots$ "nicht alle σ_i sind gleich". (Im Fall $s = 2$ lässt sich diese Fragestellung mit dem F-Ratio-Varianztest behandeln.)

▼

Lösung: In diesem Beispiel ist $\Theta = \mathbb{R}^s \times]\,0, \infty[^s$ und $\Theta_0 = \mathbb{R}^s \times \{\{\sigma, \ldots, \sigma\} \mid \sigma > 0\}$. Mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode (man vergleiche dazu Beispiel 5.4.3) erhält man die Schätzer

$$\hat{\hat{\vartheta}}[\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_s] = \{\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_s, \sqrt{{}^{(2)}\tilde{\overline{X}}_1}, \ldots, \sqrt{{}^{(2)}\tilde{\overline{X}}_s}\}$$

bzw

$$\hat{\hat{\vartheta}}_0[\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_s] = \{\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_s, \sqrt{{}^{(2)}\tilde{\overline{X}}_{\blacksquare}}, \ldots, \sqrt{{}^{(2)}\tilde{\overline{X}}_{\blacksquare}}\}$$

für die unbekannten Parameter $\vec{\vartheta} = \{\mu_1, \ldots, \mu_s, \sigma_1, \ldots, \sigma_s\}$ bzw $\vec{\vartheta}_0 = \{\mu_1, \ldots, \mu_s, \sigma, \ldots, \sigma\}$. Dabei bezeichnet $\overline{X}_i$ bzw $^{(2)}\tilde{\overline{X}}_i$ den Mittelwert bzw das zweite zentrale Moment von $\vec{X}_i = \{X_{i\,1}, \ldots, X_{i\,n_i}\}$ sowie

$$^{(2)}\tilde{\overline{X}}_{\blacksquare} = \frac{1}{n_{\blacksquare}} \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{i\,j} - \overline{X}_i)^2 = \frac{1}{n_{\blacksquare}} \sum_{i=1}^{s} n_i \, {}^{(2)}\tilde{\overline{X}}_i$$

mit $n_{\blacksquare} = n_1 + \ldots + n_s$. Für den Maximum-Likelihood-Quotient MLQ ergibt sich damit

$$\mathrm{MLQ} = \frac{L[\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_s \mid \hat{\vec{\vartheta}}_0[\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_s]]}{L[\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_s \mid \hat{\vec{\vartheta}}[\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_s]]} = \ldots = \left[\frac{\frac{1}{n_{\blacksquare}} \sum_{i=1}^{s} n_i \, {}^{(2)}\tilde{\overline{X}}_i}{\sqrt[n_{\blacksquare}]{\prod_{i=1}^{s} ({}^{(2)}\tilde{\overline{X}}_i)^{n_i}}}\right]^{-n_{\blacksquare}/2}$$

Wir werden die Hypothese $\mathcal{H}_0$ somit im Fall

$$-2\,\mathrm{Log}[\mathrm{MLQ}] = n_{\blacksquare}\,\mathrm{Log}\left[\frac{\frac{1}{n_{\blacksquare}} \sum_{i=1}^{s} n_i \, {}^{(2)}\tilde{\overline{X}}_i}{\sqrt[n_{\blacksquare}]{\prod_{i=1}^{s} ({}^{(2)}\tilde{\overline{X}}_i)^{n_i}}}\right] > c_{s-1;1-\alpha}$$

ablehnen. Man beachte die Form des im Logarithmus auftretenden Quotienten: Beim Zähler handelt es sich um das gewichtete arithmetische Mittel, beim Nenner um das gewichtete geometrische Mittel der zweiten zentralen Momente $^{(2)}\tilde{\overline{X}}_i$ von $\vec{X}_i = \{X_{i\,1}, \ldots, X_{i\,n_i}\}$.

Auch der Bartlett-Test kann leicht in *Mathematica* implementiert werden:

■ BartlettTest[*daten*]

berechnet für die normalverteilten Stichproben *stich*1, *stich*2, … den *p*-Wert des Bartlett-Tests für die Hypothese $\mathcal{H}_0$ … "alle σ_i sind gleich" gegen die Alternative $\mathcal{H}_1$ … "nicht alle σ_i sind gleich". Das Datenmaterial *daten* muss dabei die Form $\{\{s_1, x_1\}, \{s_2, x_2\}, \ldots\}$ besitzen, wobei der jeweils erste Eintrag s_i die Grundgesamtheit und der zweite Eintrag den zugehörigen Messwert x_i bezeichnet.

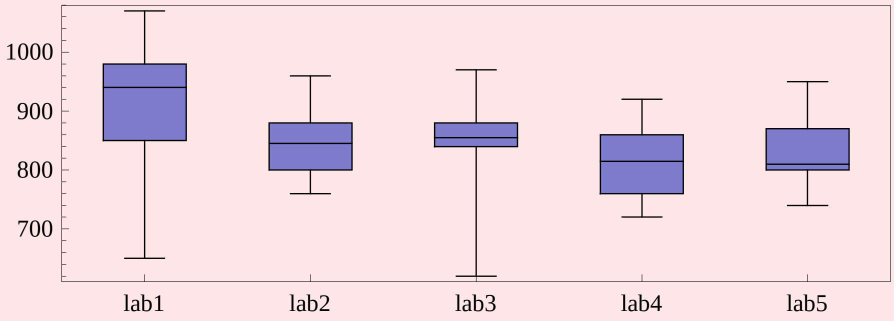
Wir veranschaulichen den Bartlett-Test an einem konkreten Beispiel:

10.2.4 Beispiel: In fünf Laboratorien wurde mit Hilfe des Michelson-Versuches jeweils zwanzig mal die Lichtgeschwindigkeit bestimmt und jener die Geschwindigkeit von 299 000 km/sek übersteigende Wert tabelliert (vergleiche dazu das Datenmaterial michelson). Man prüfe, ob die in den einzelnen Laboratorien ermittelten Messwerte in der gleichen Weise streuen.

▼

Lösung: Wir veranschaulichen dieses Datenmaterial zuerst graphisch durch ein Box-Plot

```
michelson = Rest[<< "michelsonfile"];
lab = Transpose[Table[Part[Select[michelson, #1[[1]] == i &], All, 2], {i, 1, 5}]];
BoxWhiskerPlot[lab, BoxLabels → {"lab1", "lab2", "lab3", "lab4", "lab5"}]
Clear[lab]
```



und erkennen, dass die in den einzelnen Laboratorien ermittelten Werte in unterschiedlicher Weise streuen dürften. Diese Vermutung soll nun durch einen Test bestätigt werden. Dazu nehmen wir an, dass die im *i*-ten Labor gemessenen Werte X_i normalverteilt sind, dass also das a-priori Modell

$$\mathbb{P}_{X_1} \times \ldots \times \mathbb{P}_{X_5} = \{\{\mathcal{N}[\mu_1, \sigma_1], \ldots, \mathcal{N}[\mu_5, \sigma_5]\} \mid \mu_1, \ldots, \mu_5 \in \mathbb{R},\ \sigma_1, \ldots, \sigma_5 > 0\}$$

vorliegt. So gesehen haben wir die Hypothese $\mathcal{H}_0$ …"alle σ_i sind gleich" gegen die Alternative $\mathcal{H}_1$ …"nicht alle σ_i sind gleich" zu testen. Wir verwenden dazu den Bartlett-Test:

```
BartlettTest[michelson]
```

```
PValue→0.0145132
```

Da dieser *p*-Wert klein ist, wird die Hypothese $\mathcal{H}_0$ …"alle σ_i sind gleich" abgelehnt. Die in den einzelnen Laboratorien ermittelten Messwerte streuen also tatsächlich in deutlich unterschiedlicher Weise.